

DIE *PANCAKE*-THEORIE
DER BILDUNG
SUPERGALAKTISCHER STRUKTUREN

ANALYTISCHE GRUNDLAGEN

DISSERTATION

DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK
DER
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

vorgelegt von

THOMAS BUCHERT
aus Villingen-Schwenningen

München, den 7. März 1988



Digitized by the Internet Archive
in 2026

DIE *PANCAKE*-THEORIE
DER BILDUNG
SUPERGALAKTISCHER STRUKTUREN

—

ANALYTISCHE GRUNDLAGEN

DISSERTATION

DER FAKULTÄT FÜR PHYSIK
DER
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

vorgelegt von

THOMAS BUCHERT
aus Villingen-Schwenningen

München, den 7. März 1988

1. Gutachter: Prof. G. Börner

2. Gutachter: Prof. R. P. Kudritzki

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juli 1988

INHALT UND MOTIVATION

INHALTSÜBERSICHT

Die vorliegende Arbeit ist dreiteilig. Das erste Kapitel befaßt sich mit der Literatur im Umfeld der sogenannten PANCAKE-Theorie der Bildung von Strukturen auf großen räumlichen Skalen (40 - 160 Mpc) in einem expandierenden Modellkosmos. Solche Strukturen werden im Rahmen der Newtonschen Kosmologie durch Inhomogenitäten der Dichte beschrieben, die durch anfängliche Störungen eines homogenen kosmologischen Modells durch gravitative Instabilität entstehen. Wesentliches Charakteristikum der PANCAKE-Theorie ist die approximative Beschreibung der *nichtlinearen* Entwicklung des Dichtekontrasts; sie verbindet damit primordiale Epochen der kosmischen Evolution (Zeit der Entkopplung von Strahlung und Materie) mit heute beobachtbaren Strukturen (vgl. den Teil "Motivation"). Ich gehe insbesondere auf analytische Arbeiten und auf numerische Simulationsrechnungen der Strukturbildung ein und gebe einen detaillierten und aktuellen Überblick über den Stand der Forschung durch eine umfassende Einbeziehung der sowjetischen Literatur, die zum größten Teil diese Theorie bestimmt; darunter sind auch mathematische Arbeiten zur Singularitätentheorie, welche die Vorstellungen der PANCAKE-Theorie geprägt haben, sowie Beobachtungsergebnisse.

Die Kapitel II und III entsprechen zwei Standpunkten, die ich im Verlauf der Arbeit ausführe: 1. Die Vereinheitlichung und strenge Begründung vorhandener Ansätze, 2. die Erweiterung und Kritik der in 1 gemachten Voraussetzungen. Der mathematische Teil des Kapitels II besteht aus einem konstruktiven Aufbau einer nichtlinearen approximativen Theorie im Rahmen der Newtonschen Gravitationstheorie. Motivation dafür ist das mangelhafte Verständnis des Zusammenhangs der sogenannten "Zel'dovich-Approximation" (als analytische Grundlage der PANCAKE-Theorie) zur Gravitationstheorie. Zel'dovichs' Modell geht von der Bewegung eines Kontinuums von Punktteilchen

mit anfänglich inhomogener Geschwindigkeitsverteilung aus. Diese Bewegung wird bis zur Ausbildung von Kaustiken, d.h. bis zur Entstehung von Flächen formal unendlich großer Dichte, verfolgt. Das Modell läßt sich im wesentlichen auf die Beschreibung eines kräftefreien Kontinuums zurückführen. Der Ansatz von Zel'dovich beansprucht Gültigkeit im "nichtlinearen Regime" des Strukturbildungsprozesses und wird durch kinematische Argumente und numerische Simulationsrechnungen gestützt, er ist aber keine strenge Lösung der Newtonschen Gravitationstheorie. In dieser Arbeit wird eine Lösungsklasse ohne Symmetrieannahmen konstruiert, die eine strenge Begründung dieses Ansatzes ermöglicht. Dies geschieht durch eine spezielle Einschränkung der Nichtlinearitäten des Euler-Poisson-Systems (Eulergleichung, Kontinuitätsgleichung, Newtonsche Feldgleichungen). Lösungen dieser Klasse idealisieren inhomogene, stark anisotrope Pekuliarbewegungen auf einem homogen-isotropen Hintergrund. Solche Bewegungen werden für druckfreie selbstgravitierende Medien i.A. erwartet und durch numerische Simulationen gestützt. Die vorgestellte Klasse hat die Eigenschaften, daß sie allgemeine eindimensionale Lösungen für die nichtlineare Entwicklung von Störungen eines Friedmann-Lemaître Kosmos enthält; Lösungen dieser Klasse gehen durch Linearisierung über in die bekannte lineare Theorie der Entwicklung skalarer Störungen; die Bewegung des dreidimensionalen Mediums wird durch lokal eindimensionale Kontraktionen erzeugt. Es wird ein Algorithmus angegeben, der es gestattet, die Lösungen der eingeschränkten nichtlinearen Klasse aus entsprechenden Lösungen der linearen Theorie zu erzeugen, (auch für räumlich "gekrümmte" Hintergründe und für Modelle mit kosmologischer Konstante). Schließlich kann die von Zel'dovich vorgeschlagene Approximation im Sinn einer Einbettung in die diskutierte Lösungsklasse verstanden werden. Die approximative Verwendung der Lösungskurven definiert eine "verallgemeinerte approximative Theorie", die es gestattet, die nichtlineare Entwicklung bei separater Vorgabe von Geschwindigkeits- und Dichtestörungen zu modellieren. Diese Entwicklung wird im numerischen Teil des Kapitels II näher untersucht.

Ein Merkmal dieser Untersuchungen ist die hohe räumliche Auflösung der Strukturen; phänomenologische Aspekte der Theorie, wie sie bislang im Rahmen numerischer Rechnungen studiert wurden, können am analytischen Modell demonstriert werden. Das Kapitel II gibt damit eine strenge mathematische Grundlage der PANCAKE-Theorie und erweitert das Verständnis eines erfolgreichen, aber bislang formal unvollständigen Modells der Strukturbildung auf großen Skalen.

Das Kapitel III greift im Einzelnen die Resultate des Studiums der Nichtlinearitäten, die in Kapitel II durchgeführt wurde, auf. Die Einschränkungen der Anfangsbedingungen der dort diskutierten Lösungen geben Anlaß zur Erarbeitung allgemeinerer Lösungsansätze, welche die Nichtlinearitäten nicht, wie bei der Bestimmung der Lösungsklasse des Kapitels II, spezialisieren. Die Konstruktion strenger Lösungen gelingt in zwei räumlichen Dimensionen durch die Forderung der Erhaltung bestimmter vektorieller Größen längs Integralkurven des Geschwindigkeitsfeldes. Bestätigungen des Standard-Bildes eines stark anisotrop verlaufenden Kollaps, aber auch Aspekte der Kritik der Standard-Approximation werden diskutiert. Einsichten in die Struktur der unbekannten allgemeinen Lösung des Problems werden ermöglicht. Das Kapitel III schließt mit der Diskussion zweier Schwachstellen des PANCAKE-Szenariums: 1. Einer mathematischen Aussage über die Singularitätenstruktur, 2. der nichtlinearen Entwicklung von Rotationsstörungen des Geschwindigkeitsfeldes. Zum ersten Punkt wird gezeigt, daß die Vektorflüsse aller vorgestellten Lösungsklassen Lagrange-Singularitäten besitzen; es wird aber auch dargestellt, daß diese Eigenschaft möglicherweise nicht, wie angenommen, auf allgemeine selbstgravitierende Flüsse übertragbar ist. Zum zweiten Punkt wird gezeigt, daß das von der linearen Theorie vorausgesagte Aussterben von Rotationsstörungen irreführend ist; durch die nichtlineare Kopplung des Dichtewachstums an die Rotation des Mediums läßt sich sogar ein singuläres Verhalten der Rotation auf PANCAKES für generische Anfangsdaten beweisen.

INHALTSGLIEDERUNG

I. Die Grundgedanken der PANCAKE-Theorie in Beziehung zur Literatur

I.1. Zel'dovichs' frühe Arbeiten

I.2. Bestätigung von Zel'dovichs' Ansatz durch analytische und numerische Tests

I.3. Moderner Standpunkt der Theorie und numerische Simulationen des Szenariums

I.4. Arnol'd's Einfluß auf Ideen der Identifizierung von Strukturen auf großen Skalen mit der Struktur von Singularitäten; "kinematische Approximationen", Analogien der geometrischen Optik und Experimente

I.5. Zellen- und Netzstrukturen, Filamente und massereiche Proto-Galaxienhaufen. Analytische Begründung für ihre Entstehung und Bestätigung durch Beobachtungen

II. Strenge Begründung und Verallgemeinerung analytischer Grundlagen der Standardtheorie

II.1. Die Grundgleichungen

II.2. Eine spezielle Struktureigenschaft der Grundgleichungen

II.3. Ein Lösungsansatz für die nichtlineare Entwicklung von Geschwindigkeits- und Dichtestörungen in Friedmann-Modellen

II.4. Extrapolationsalgorithmus und -Theorem

II.5. Zusammenfassung und geschlossene Darstellung der Lösung in den Fällen ($K = 0$, $K > 0$, $K < 0$; $\Lambda = 0$)

II.6. Einbettung des Ansatzes von Zel'dovich in die Lösungsklasse und strenge Begründung approximativer Anwendung durch Eigenschaften der Lösung

II.7. Allgemeine eben-symmetrische Lösungen, verallgemeinerte approximative Theorie und das "Selbstkonsistenzkriterium"

II.8. Numerische Auswertung der verallgemeinerten Approximation im Vergleich zur Standardtheorie und zu numerischen Simulationen

II.8.1. Diskussion der Entwicklung von PANCAKES bis hin zu Proto-Galaxienhaufen mit hoher räumlicher Auflösung der Singularitätenstruktur

II.8.2. Die Entwicklung eines Fourierspektrums mit "cut-off" bei separater Vorgabe von Geschwindigkeits- und Dichtestörungen

II.8.3. Zur Abhängigkeit des Kollapszeitpunkts von relativer Phase und relativer Amplitude der Störungsfelder

III. Kritik und Erweiterung des Standard-Bildes

- III.1. Lösungsklassen mit nicht-verschwindender Gaußscher Krümmung der Anfangspotentialflächen
 - III.1.1. Ein Integral der Grundgleichungen in zwei räumlichen Dimensionen
 - III.1.2. Ein Lösungsansatz für die Bestimmung zweidimensionaler Lösungen unter Erhaltung des Vektors $\vec{\Psi}_1$
 - III.1.3. Hinreichende und notwendige Einschränkungen der Anfangsbedingungen
 - III.1.4. Einige Klassen strenger Lösungen mit Beispielen
 - III.1.5. Diskussion
- III.2. Bemerkungen zur Anwendung der Theorie der Lagrange-Singularitäten auf approximative Szenarien der Galaxienentstehung
- III.3. Bemerkungen zur nichtlinearen Entwicklung von Rotationsstörungen

Appendix A:

Die "Grundgleichungen" in dimensionsloser und skalierte Form; allgemeine Lösung für die Entwicklung eindimensionaler Inhomogenitäten sowie der Lösungsansatz des Teils II in den Fällen ($K = 0$, $K < 0$, $K > 0$; $\Lambda = 0$)

Appendix B:

Eine Klasse von Lösungen im Fall verschwindender Hintergrunddichte

Appendix C:

Beweis des "Extrapolationstheorems" und Bemerkungen zu den "nichtlinearen Restgliedern"

Figurenappendix

Referenzen

MOTIVATION

Die kosmologische Fragestellung nach Entstehung und Entwicklung der heute beobachteten räumlichen Strukturen als *Folge* anfänglicher Fluktuationen um eine mittlere Materieverteilung in früheren Stadien der kosmischen Evolution schränkt die möglichen Antworten im Sinn einer mathematischen Beschreibung bereits ein: Gesucht sind mathematische Modelle, die für die obige Fragestellung die zunächst notwendigen physikalischen Aspekte berücksichtigen und hinreichend sind, die vorhandenen heutigen Beobachtungsdaten eindeutig auf Anfangsdaten eines *Fluktuationsspektrums* einer früheren Epoche zurückzuführen. Die Fragestellung impliziert bereits ein Schema für diese Entwicklung: Ein Raumzeit-Modell als Abbild einiger Eigenschaften der kosmologischen Entwicklung (isotrop expandierende Raumzeit homogener Dichteverteilung, sog. Friedmann-Lemaître-Modell) beschreibt die Entwicklung der mittleren Materieverteilung, Fluktuationen werden als *Störungen* dieses Modells beschrieben, (welche jedoch beliebig anwachsen können), die Epoche der Vorgabe von Anfangsstörungen ist im Rahmen dieses Modells im Sinn einer der Beobachtungsprüfung zugänglichen Wahl festgelegt (Zeit der Entkopplung von Materie und Strahlung, Messungen der Abweichung von der (in hohem Maß) isotropen Verteilung der Hintergrundstrahlung).

Die Kosmologie der Entwicklung von Inhomogenitäten zerfällt damit zunächst in zwei Epochen: Die Entstehung des Fluktuationsspektrums und die weitere Entwicklung der Fluktuationen. Die Entwicklungsepoche wurde aufgrund der Beschreibung im Rahmen der linearen Störungstheorie weiter künstlich unterteilt in das "lineare Regime", d.i. der Gültigkeitsbereich für linearisierte Störungen, und das "nichtlineare Regime", in welches die Entstehung und Entwicklung von Galaxien, Galaxienhaufen, Filamenten, u.s.f. fällt (festgelegt durch den *Dichtekontrast* $\delta := (\rho - \rho_H)/\rho_H$ als Abweichung von der mittleren Dichte ρ_H durch $\langle \delta \rangle_{rms} > 1$, $\langle \delta \rangle_{rms}$ ist die Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrats bezogen auf eine räumliche Skalenlänge der Fluktuationen).

Das genannte Hintergrundmodell wird als (parameterabhängige) Lösung der Newtonschen Gravitationstheorie beschrieben, (vgl. alternativ dazu den "kinematischen" Ansatz der Bestimmung des Modells, diskutiert in Ehlers & Rindler 1987). Die gesuchten Modelle für die Entwicklung von anfänglichen Störungen dieses Hintergrundmodells lassen sich folgendermaßen charakterisieren: Sie gründen sich auf eine physikalisch sinnvolle Theorie

(in der vorliegenden Arbeit: Newtonsche Gravitationstheorie, hydrodynamische Beschreibung der inhomogenen Relativentwicklung der "Pekuliarfelder" gegen den Hintergrund, Vernachlässigung von Druckkräften; Begründung vgl. Teil I), besitzen eine hinreichende Anzahl von Parametern (e.g. die heute beobachtete mittlere Dichte, die Rotverschiebung der Epoche der Vorgabe von Anfangsdaten, Amplituden und Skalen der Fluktuationen, u.s.f.) und behalten ihre Gültigkeit im "nichtlinearen Regime" des Strukturbildungsprozesses.

Modelle sind im Idealfall *Lösungen* der die zugrundegelegte Theorie konstituierenden Gleichungen. Zusammen mit Annahmen über z.B. Symmetrie der Lösungen, über die Einschränkung der Anfangsdaten, welche physikalische Bedingungen reflektieren, die nicht von der gewählten Theorie beschrieben werden, sondern vielmehr durch vorangehende Überlegungen begründet sind (Theorie für die Entstehung des Fluktuationsspektrums, e.g. die Skala der Fluktuationen, vgl. I.3) oder über die approximative Anwendung von Lösungen (durch Vernachlässigung von Zwangsbedingungen), ergeben diese ein parameterabhängiges *Szenarium*. Dieses Szenarium bildet das Strukturbildungsproblem ab auf ein funktionierendes System, welches schrittweise den Erfordernissen der Fragestellung angepaßt wird. Die Voraussetzungen werden i.a. nicht durch grundsätzliche theoretische Einwände abgeändert, sondern durch Notwendigkeiten der Beschreibung beobachtbarer Struktur. Dieser eher praktische Standpunkt kann dazu verleiten, verstandene formale Zusammenhänge (z.B. im Rahmen der linearisierten Theorie) zu extrapolieren (z.B. in das "nichtlineare Regime", vgl. die sog. "Zel'dovich-Approximation" (Teil I.1)), anstatt den Informationsgehalt der zugrundegelegten Theorie hinsichtlich der erweiterten Fragestellung auszuschöpfen. In der vorliegenden Arbeit werden in selbstkonsistenter Weise vorhandene Ansätze und Approximationen, die Extrapolationen in das "nichtlineare Regime" darstellen, auf eine exakte Grundlage im Rahmen der Newtonschen Gravitationstheorie gestellt und die Konsequenzen dieser Betrachtung ausgeschöpft. Dieser vereinheitlichende Gedanke führt auf Verallgemeinerungen, schließlich auf Kritik der gemachten Voraussetzungen und in der Folge auf Ansätze zur Erweiterung des Standard-Bildes. Die weitere Zielvorstellung ist, alle Konsequenzen der *Newtonschen Theorie* für die nichtlineare Entwicklung von Inhomogenitäten (zumindest für Staubkontinua) zu verstehen, um damit auch Lösungsansätze und Hinweise für Grundprobleme der Strukturbildung (wie z.B. die Existenz von Struktur-

Hierarchien oder das Problem der Fragmentierung zusammenhängender Materie in Unter-einheiten) zu erarbeiten.

Analytische Ansätze für die Beschreibung von Strukturbildung müssen notwendigerweise Rücksicht auf Nichtlinearitäten der Gleichungen nehmen; starke Vereinfachungen wie Linearisierung auf Hintergrundmodellen sind für die zu beschreibenden großen Abweichungen von der Homogenität nicht zulässig (die linearisierte Theorie beschreibt z.B. durch die Gültigkeit des Superpositionsprinzips keine (auch in der Newtonschen Theorie nichtlineare) Wechselwirkungen zwischen räumlich nicht korrelierten Fluktuationen). Diese mathematische Komplikation wurde bisher umgangen und durch ad hoc-Ansätze ersetzt, die dann (insbesondere durch numerische Rechnungen) qualitativ bestätigt wurden. Die weitreichende Anwendung solcher Ansätze, die das "nichtlineare Regime" umfassen, verlangt eine strenge Grundlegung, wie sie in der vorliegenden Arbeit verfolgt wird. Die Konzentration auf die PANCAKE-Theorie ergab sich daraus, daß , obwohl es keine mit den Beobachtungen vollständig konsistente Theorie der Galaxienentstehung im geschilderten Sinn gibt, die Ansätze im Rahmen der PANCAKE-Theorie ein Szenarium bilden, welches viele Details des Strukturbildungsprozesses erklären kann, sowie qualitativ und auch zum Teil quantitativ Beobachtungsmaterial reproduziert.

Der Anspruch der Begründung von ad hoc-Ansätzen auf der Basis strenger Lösungen der Gleichungen impliziert die Frage nach Konstruktion einer *allgemeinen* Lösung (d.i. eine Lösung, die in der betrachteten Theorie durch drei frei wählbare Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes und eine davon unabhängig frei vorgebbare Dichteverteilung erzeugt wird). Viele bekannte methodische Ansätze zur Lösung partieller Differentialgleichungen führten nicht zur allgemeinen Lösung des Problems. Einige durch die Struktur der Gleichungen motivierte Ansätze führten mich auf eine Reihe von speziellen Staublösungen, von denen einige nach dem Kriterium der Anpassung an die physikalische Situation für diese Arbeit ausgewählt wurden. Sie haben den entscheidenden Vorteil gegenüber bekannten Lösungen mit hoher Symmetrie, daß sie *keine Symmetrie* besitzen (mit Ausnahme der Einschränkung auf ebene Bewegungen (vgl. III.1.), welche selbst nicht durch Symmetrieanahmen eingeschränkt sind bei einem Teil der vorgestellten Lösungen). Dieser Vorteil ermöglicht gegenüber z.B. sphärisch-symmetrischen Lösungen, die lange Zeit den Verständnisprozess des Strukturbildungsproblems eher behinderten, die Beschreibung ei-

nes stark anisotrop verlaufenden Kollaps, der bereits durch frühere analytische Arbeiten als *generisch* im Sinn einer großen Anzahl möglicher Anfangsbedingungen für die kollabierende Materie erkannt wurde (vgl. die Literaturnachweise in Teil I). Man sollte im Zusammenhang mit analytischen Methoden darauf hinweisen, daß diese im Fall der anisotropen Kontraktion als auch im Fall sphärischer Symmetrie zahlreichen numerischen Bestätigungen vorausgegangen sind; die vorgestellten Lösungsklassen, obwohl sie nur erste Schritte sind auf dem Weg zu einer allgemeinen Lösung, enthalten bereits die wichtigsten Konsequenzen für den derzeitigen Stand der Entwicklung von PANCAKES und überschreiten die Grenzen räumlicher Auflösbarkeit von Struktur durch bislang durchgeführte numerische Simulationsrechnungen (vgl. die Teile II.8. und III.1.).

In der vorliegenden Arbeit strebe ich eine selbstkonsistente Darstellung der erzielten Resultate und Formalismen an, sowie außerdem eine formale Integration wichtiger Resultate der Moskauer Gruppe um Zel'dovich, welche die PANCAKE-Theorie im wesentlichen entwickelt hat, auch durch Rückgriff auf z.T. nicht übersetzte russische Originalarbeiten. Ich hielt es für sinnvoll, auch einen detaillierten Überblick über die Literatur im Umfeld der PANCAKE-Theorie zu geben, die gerade in der Zeit der Entstehung dieser Arbeit sprunghaft angewachsen ist (vgl. Kapitel I).



Bedeutungsschlüssel der verwendeten Symbole:

ρ : Massendichte

ρ_H : Hintergrunddichte (zeitabhängig)

δ : Dichtekontrast $\delta = \frac{\rho - \rho_H}{\rho_H}$

Λ : kosmologisches Glied

$\vec{v}$: Geschwindigkeit

$\vec{v}_H$: Hubblegeschwindigkeit

$\vec{u}$: Pekuliargeschwindigkeit $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}_H$

S : Geschwindigkeitspotential $\vec{v} = \nabla S$

s : Pekuliargeschwindigkeitspotential $\vec{u} = \nabla s$

$\vec{g}$: Gravitationsfeldstärke oder -beschleunigung

$\vec{g}_H$: Hubblebeschleunigung

$\vec{w}$: Pekuliarbeschleunigung $\vec{w} = \vec{g} - \vec{g}_H$

Φ : Gravitationspotential $\vec{g} = -\nabla\Phi$

ϕ : Pekuliaranteil des Gravitationspotentials $\vec{w} = -\nabla\phi$

a : zeitabhängiger Expansionsfaktor in Friedmann-Modellen

H : Hubblefunktion in Friedmann-Modellen $H = \frac{\dot{a}}{a}$

x_i, ∇ : Eulersche Koordinaten und Gradient

q_i, ∇_q : "mitschwimmende" Eulersche Koordinaten und Gradient $q_i = \frac{x_i}{a}, \nabla_q = \frac{1}{a} \nabla$

X_i, ∇_X oder ∇_0 : Lagrangesche Koordinaten und Gradient

$t, \partial_t, \partial_t|_q$: Zeitparameter und partielle Ableitung im (x,t) bzw. (q,t) -Raum, $\partial_t|_q = \partial_t + H\vec{q} \cdot \nabla_q$.

Z : Rotverschiebung

$D_v = \frac{d}{dt}|_v = \partial_t + \vec{v} \cdot \nabla$: Lagrangesche Zeitableitung im (x,t) -Raum bezügl. $\vec{v}$.

$D_u = \frac{d}{dt}|_u = \partial_t|_q + \frac{\vec{u}}{a} \cdot \nabla_q$: Lagrangesche Zeitableitung im (q,t) -Raum bezügl. $\frac{\vec{u}}{a}$.

$\vec{f}$: Integralkurven von $\vec{v}$

$\vec{f}_H$: Integralkurven von $\vec{v}_H$

$\vec{F}$: Integralkurven von $\frac{\vec{u}}{a}$; $F_i = \frac{L_i}{a}$

$\vec{p}, \vec{P}$: Störungsterme

$b^\alpha, b^\beta, g^\alpha, g^\beta$: zeitabhängige Störungsmoden

π : Lagrangesche Projektionsabbildung

Konventionen :

Für die gesamte Arbeit gelten folgende Vereinbarungen: Über doppelt auftretende Indizes wird summiert. Ableitungen bezüglich Eulerscher Koordinaten werden explizit notiert (vgl. oben); bezüglich Lagrangescher Koordinaten durch Kommata abgekürzt. Die totale (Lagrangesche) Zeitableitung wird mit einem Punkt abgekürzt. Beachte: Es gilt $D_v = D_u$. (Der Punkt wird auch für partielle Zeitableitungen von nur zeitabhängigen Funktionen benutzt). Mit einer Null unten indizierte Buchstaben sind Zahlen, die z.B. Einheiten festlegen; mit einer Null überschriebene Buchstaben (sowie auch Großbuchstaben) sind Funktionen von Lagrangeschen Koordinaten, gegeben zur Zeit $t = t_0$ (Anfangsdaten). Die Zeit $t = 0$ markiert die "Big Bang-Singularität". Die Sprechweise "Eulerscher Raum" und "Lagrangescher Raum" bezieht sich auf entsprechende Koordinatendarstellungen derselben (Newtonschen) Raumzeit.

I. DIE GRUNDGEDANKEN DER PANCAKE-THEORIE IN BEZIEHUNG ZUR LITERATUR

I.1. Zel'dovichs' frühe Arbeiten

Den Ausgangspunkt für eine erst in jüngster Zeit auch von westlichen Wissenschaftlern mit großem Interesse verfolgten theoretischen Entwicklung zu einem Szenarium, welches heute mit dem Schlagwort PANCAKE-Theorie bezeichnet wird (vgl. die Übersichtsartikel: Shandarin et al. 1983, Zel'dovich et al. 1982, Silk 1983, Jones 1980, Jones & Palmer 1985, White 1987, Shandarin & Zel'dovich 1988) markiert eine Arbeit von Zel'dovich (1970a), vgl. auch Zel'dovich (1970b, 1978), in welcher er seine Ideen zur Extrapolation der bislang gebräuchlichen linearen Theorie für die Entwicklung von Dichtestörungen eines Friedmann-Hintergrunds aufgrund gravitativer Instabilität darlegt. Die *lineare Theorie* wurde zuerst in der relativistischen Theorie gelöst und diskutiert von Lifshitz 1946, Lifshitz & Khalatnikov 1963, in der Newtonschen Theorie, z.B. von Bonnor 1956, 1957, 1967 und vielen anderen Autoren, vgl. e.g. Zel'dovich 1965 (ch. V), Weinberg 1972 (ch. 9, 10).

Zel'dovich's *approximative nichtlineare Theorie* leistet, was die lineare Theorie, welche lange Zeit in Betrachtungen zur Galaxienentstehung vorherrschend war, nicht leistet, nämlich die Beschreibung der Entwicklung von Objekten hoher Dichte aus anfänglichen z.B. durch ein Harrison-Zel'dovich-Spektrum beschriebenen Dichtefluktuationen (Harrison 1970, Zel'dovich 1972, Peebles & Yu 1970) in einer endlichen Zeit. Die beschriebenen Strukturen können als Proto-Galaxienhaufen interpretiert werden (vgl. I.5.), so daß diese Theorie eine Verbindung zwischen der Kosmologie des frühen Universums und heute beobachteten Objekten schafft.

Die nun folgende Darlegung beschränkt sich auf Zitate von Literaturstellen. Ein formal strenger Rahmen für die vorgestellten Ansätze wird in Kapitel II entwickelt und in II.6. und II.7. abschließend diskutiert. (Der dort erfüllte Anspruch einer formal konsistenten Beschreibung im Rahmen der Newtonschen Gravitationstheorie wird von den folgenden Ansätzen nicht erfüllt).

Zel'dovich's Überlegungen basieren auf einem Ansatz für eine Bewegungsgleichung der Flüssigkeits-"teilchen" des kosmologischen Substrats (vgl. das "Lagrange-Bild" der

hydrodynamischen Beschreibung, II.1.):

$$\vec{x} = \vec{f}^A(\vec{X}, t) = a(t)\vec{X} + \zeta(t)\vec{p}(\vec{X}); \quad (E1)$$

(x_i sind Eulersche, X_i Lagrangesche Koordinaten, "A" steht für "Approximativer Ansatz").

(E1) stellt eine Überlagerung der durch die Expansion des Hintergrundmodells gegebenen Bewegung (beschrieben durch die Funktion $a(t)$) und einer inhomogenen vektoriellen Verrückung $\vec{p}(\vec{X})$ der "Teilchen" dar. Die Forderung der Massenerhaltung gemäß $\rho^A dx_1 dx_2 dx_3 = \rho_{H_0} dX_1 dX_2 dX_3$, (die anfängliche Dichte ρ_{H_0} wird als homogen angenommen), führt auf den Ausdruck (vgl. das Integral der Kontinuitätsgleichung in II.1. (Gl.(15b)):

$$\frac{\rho^A}{\rho_{H_0}} = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \right\|^{-1}; \frac{\partial x_i}{\partial X_k} = a(t)\delta_{ik} + \zeta(t)p_{i,k}. \quad (E2)$$

Die Zeitentwicklung der Störungen ist über die Funktion $\zeta(t)$ dadurch bestimmt, daß sich durch Linearisierung von (E1) und (E2):

$$\rho^A \approx \frac{\rho_{H_0}}{a^3} \left(1 - \frac{\zeta(t)}{a(t)} \text{Spur}(p_{i,k}) \right) =: \rho^L; \vec{x} \approx a(t)\vec{X}$$

das aus der linearen Theorie bekannte Entwicklungsgesetz für den Dichtekontrast $\delta = \frac{\rho - \rho_H}{\rho_H}$ im Fall eines verschwindenden Materiedrucks ergibt:

$$\rho^L = \rho_H (1 + \delta^L(\vec{q}, t)); \delta^L(t) \propto \frac{\zeta(t)}{a(t)} =: b^\alpha(t); \quad (E3)$$

$\rho_H(t)$ ist die Hintergrunddichte $\rho_H = \frac{\rho_{H_0}}{a^3}$ (vgl. II.1.), $q_i := \frac{x_i}{a(t)}$ sind mit der Expansion des Hintergrunds "mitschwimmende" Koordinaten, $b^\alpha(t) \propto t^{2/3}$ (für $a(t) \propto t^{2/3}$, flaches Friedmann-Modell) ist die wachsende Mode der zwei linear unabhängigen Lösungen der auf dem Hintergrund linearisierten Gleichung für δ (vgl. II.4., Gl. (22c)). Man begründet die Auswahl der wachsenden Mode damit, daß die fallende Mode ($b^\beta(t) \propto t^{-1}$ hier) für große Zeiten unbedeutend wird.

Der Ansatz (E1) ist also so konstruiert, daß er Aussagen der linearen Theorie in ihrem Gültigkeitsbereich reproduzieren kann. Die von Zel'dovich vorgeschlagene Extrapolation soll diesen Gültigkeitsbereich erweitern. Bestätigungen dafür liefern spätere analytische

und numerische Arbeiten (vgl. I.2.); die Motivation für die Form dieses Extrapolationsansatzes wird in dem Buch von Zel'dovich & Novikov (1975, 14.2) durch Bezug auf die Beschreibung eines kräftefreien Kontinuums nachgeliefert (vgl. auch I.3.).

Die von Zel'dovich (1970a,b) vorrangig diskutierten Eigenschaften des Ansatzes (E1,2) sind:

1. Das Auftreten von Singularitäten in der Dichte nach endlicher Zeit.
2. Die stark anisotrope Kontraktion der "Staubwolke" in der Endphase des Kollaps zu einer flächenhaften Materieverdichtung (zu einem sog. "PANCAKE", russ.: "bliny": kleine Pfannkuchen).

Er gründet seine Diskussion auf die Darstellung der Dichte (E2) im Diagonalsystem der Jakobischen Matrix $\frac{\partial x_i}{\partial \vec{X}_k}$ (Voraussetzung dafür ist, daß der Tensor $p_{i,k}$ symmetrisch ist, d.h. $\vec{p} = -\nabla_X \psi$):

$$\rho^A = \rho_H [(1 - b^\alpha(t)\lambda_1)(1 - b^\alpha(t)\lambda_2)(1 - b^\alpha(t)\lambda_3)]^{-1}; \quad (E4)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind die $\vec{X}$ -abhängigen Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(\psi_{,i,k} - \lambda \delta_{i,k}) = 0$. Kontraktion der Staubwolke längs einer Eigenrichtung entspricht einem positiven Eigenwert, Expansion einem negativen. Die Koinzidenz der Eigenwerte entspricht einem sphärisch-symmetrischen Kollaps. Im allgemeinen wird jedoch ein Eigenwert, z.B. λ_1 , in einem Punkt $\vec{X}$ den größten Wert besitzen. Dieser dominiert dann für große Zeiten die Deformation des Volumenelements in $\vec{X}$ (vgl. (E4)), so daß sich die Bewegung lokal einer eindimensionalen Bewegung annähert, für $\lambda_1 > 0$ entartet das betrachtete Volumenelement zu einem Flächenelement normal zur zugehörigen Eigenrichtung zu einer Zeit, die durch die Dichtesingularität bestimmt ist:

$$\rho(\vec{X}, t_c) \rightarrow \infty; (1 - b(t_c)\lambda_1) = 0. \quad (E5)$$

Die Dichte wird an verschiedenen Orten zu verschiedenen Zeiten, je nach der Größe der Eigenwerte, singular. Da die Eigenrichtungen im Raum gemäß einer auf einer gewissen Skala glatten Funktion (gegeben durch die Anfangsbedingung) variieren, entsteht im Raum eine flächenhafte Materieverteilung, ein PANCAKE. Je nach Vorzeichen der anderen Eigenwerte expandiert die Materie in der Fläche der PANCAKES oder sie kontrahiert auf filamentartige Strukturen und schließlich auf punktförmige Materieverdichtungen zu, vgl.

die Fallunterscheidung weiter unten und die Diskussion in I.5.. In höheren Dimensionen entsteht nach Auftreten der ersten Singularität eine komplexe Struktur von Singularitäten, die im Rahmen der Theorie der Lagrange-Singularitäten erfaßt werden kann (vgl. I.4. und I.5.). Singularitäten in der Dichte werden hier im Sinn einer idealisierten Beschreibung hoher Dichtekontraste verstanden; es ist klar, daß , zumindest im Endstadium des Kollaps, Druckkräfte dem singulären Verhalten entgegenwirken und zur Ausbildung von Stoßwellen führen; auf der betrachteten räumlichen Skala dieser Strukturen ist jedoch die idealisierte Beschreibung in erster Näherung akzeptabel, (im Verlauf des Kapitels I und a.a.O. werde ich dies noch näher erläutern).

Gleichzeitig erscheint eine von Zel'dovich bereits inhaltlich zitierte Arbeit von Doroshkevich (1970). Doroshkevich studiert lokale Eigenschaften des Tensors $\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_i \partial X_k}$ der Deformation. Annahmen über die Verteilungsfunktion der Tensorkomponenten führen ihn zu statistischen Aussagen über die Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Eigenwerten. Er findet, daß ein gegebener Satz von Eigenwerten $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ mit einer Wahrscheinlichkeit $\propto (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)$ realisiert wird. Das bedeutet z.B., daß die Koinzidenz aller Eigenwerte (sphärisch-symmetrischen Kollaps) die Wahrscheinlichkeit Null besitzt. Die quantitative Auswertung dieser Überlegung ergibt folgende Fallunterscheidung: Für $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \infty > \lambda_1 > -\infty, \lambda_1 \geq \lambda_2 > -\infty, \lambda_2 \geq \lambda_3 > -\infty$ kontrahieren 8 % der Materie entlang aller drei Achsen ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$), 42 % entlang zwei ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0 > \lambda_3$), 42 % entlang einer Achse ($\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$) und 8 % der Materie expandiert in allen drei Eigenrichtungen ($0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$). Das bedeutet, daß praktisch die gesamte Materie ($\lambda_1 > 0$: 92 %) schließlich in PANCAKES "kondensiert"; vgl. dazu auch die spätere Arbeit von Doroshkevich & Shandarin (1978a) sowie von Shandarin et al. (1983, ch.5c). Diese Überlegungen sowie die Tatsachen, daß der Ansatz (E1) einmal eine "selbstkonsistente" Lösung des eindimensionalen Problems im Sinn einer Arbeit von Doroshkevich et al. (1973, diskutiert in I.2.) darstellt und zum andern durch numerische Tests und Simulationsrechnungen qualitativ bestätigt wird, führten Zel'dovich und seine Mitarbeiter dazu, Aussagen des Ansatzes (E1) als repräsentativ für die allgemeine Entwicklung der Staubwolke anzusehen.

I.2. Bestätigungen von Zel'dovichs' Ansatz durch analytische und numerische Tests

Das Verhalten von Störungen auf einem Hintergrund läßt sich durch Lösung des Euler-Poisson-Systems (vgl. II.1.) linearisiert auf einer Friedmann-Hintergrundlösung gewinnen. Von dem Ansatz (E1,2) kann man zunächst nicht erwarten, daß er Lösung des entsprechenden nichtlinearen Problems ist, da die linearisierten Lösungen des nichtlinearen Problems i.A. nicht Lösungen der auf dem Hintergrund linearisierten Gleichungen sind. Ein möglicher Test ist nun, die "Selbstkonsistenz" des Ansatzes im Rahmen der Newtonschen Gravitationstheorie zu prüfen. Doroshkevich et al. (1973) vergleichen dazu den Ausdruck für die Dichte (E4) mit der Dichte $\hat{\rho}^A$, die sich aus dem Ansatz als notwendige Quelle der Gravitationsfeldgleichung über $\hat{\rho}^A = \frac{-1}{4\pi G} \nabla \cdot \vec{g}^A$, $\vec{g}^A = \vec{f}^A$ ergibt; sie definieren ein lokales Maß für den Fehler ϵ^A durch:

$$\epsilon^A := \frac{\hat{\rho}^A - \rho^A}{\rho^A} = \epsilon^A(\vec{X}, t), \quad (E6)$$

Das Resultat ist:

$$\epsilon^A = \frac{a^2(\tilde{\zeta} + 2\frac{\ddot{a}}{a}\zeta)I(\psi) + a\zeta(2\tilde{\zeta} + \frac{\ddot{a}}{a}\zeta)II(\psi) + 3\zeta^2\tilde{\zeta}III(\psi)}{3a^2\ddot{a}}; \quad (E7)$$

$I(\psi)$, $II(\psi)$ und $III(\psi)$ bezeichnen die drei skalaren Invarianten des Tensors $\psi_{i,k}$:

$$\begin{aligned} I(\psi) &:= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \psi_{i,i} \\ II(\psi) &:= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{2}(I^2(\psi) - \psi_{i,k}\psi_{i,k}) \\ III(\psi) &:= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{1}{3}(I^3(\psi) - 3I(\psi)II(\psi) - \psi_{i,k}\psi_{k,l}\psi_{l,i}). \end{aligned}$$

Das Fehlermaß hängt durch die Abhängigkeit von skalaren Invarianten nicht von der ursprünglichen Wahl des Koordinatensystems in (E4) ab. Die Bestimmung der Funktion $\zeta(t)$ gemäß (E3) impliziert, daß der Koeffizient der ersten Invarianten fortfällt:

$$\zeta = ab^\alpha \Rightarrow \tilde{\zeta} + 2\frac{\ddot{a}}{a}\zeta = 0; \quad (E8a)$$

das Fehlermaß ist nur noch von zweiter und dritter Ordnung in den Störungen; es reduziert sich auf den Ausdruck:

$$\epsilon^A = -(b^\alpha)^2 II(\psi) - 2(b^\alpha)^3 III(\psi). \quad (E8b)$$

Die Unabhängigkeit von Termen erster Ordnung drückt aus, daß der Ansatz (E1) die linearisierte Entwicklung selbstkonsistent repräsentiert: Solange die Störungen klein sind ($b^\alpha \lambda_1, b^\alpha \lambda_2, b^\alpha \lambda_3 \ll 1$) gilt $\epsilon^A \sim (b^\alpha \lambda_i)^2 \ll b^\alpha \lambda_i$. Außerdem ist im Fall eindimensionaler Störungen ($\lambda_2 = \lambda_3 = 0$) das Fehlermaß identisch Null. Eine von Doroshkevich et al. (1973) hervorgehobene Eigenschaft ist die Endlichkeit des Fehlers im Moment der Entstehung von PANCAKES; Geschwindigkeit und Beschleunigung bleiben bei *endlicher* Flächendichte (im Gegensatz zum sphärischen-symmetrischen Kollaps) ebenfalls endlich. Dies erlaubt eine Abschätzung des Gültigkeitsbereichs von (E1,2) bestimmt durch $|\epsilon^A| < 1$. Dieser Gültigkeitsbereich erstreckt sich für etwa 46 % der Materie (vgl. die statistischen Argumente nach Doroshkevich (1970)) bis hin zur PANCAKE-Entstehung. Das Fehlermaß wächst zwar schneller als die Störungen im linearen Regime, die Zeit für das Wachsen ist jedoch beschränkt durch die Endlichkeit der Kollapszeit. Numerische Abschätzungen über den Einfluß benachbarter Teilchen auf die quasi-eindimensionale Bewegung ergeben keine nennenswerte Abweichung vom lokalen Maß ϵ^A , so daß zumindest in der Nähe der kollabierten Materieschicht und insbesondere für Materiekonzentrationen vom Typ ($\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > \lambda_3$, vgl. I.1.), die Bewegung gut durch den Ansatz (E1,2) approximiert werden könne (Doroshkevich et al. 1973). Man beachte, daß das Verschwinden des Fehlers nur im eindimensionalen Fall dafür hinreichend ist, daß der betrachtete Ansatz eine (spezielle) Lösung des Euler-Poisson-Systems ist. Der Grund ist, daß die Integrabilitätsbedingung des Gravitationsfeldes, (die nur in einer Dimension trivial ist), durch diesen Test nicht erfaßt wird, (vgl. dazu II.7.).

Die oben diskutierte Arbeit enthält den bis zum Beginn der vorliegenden Arbeit, einzigen *analytischen* Vergleich mit allgemeinen selbstgravitierenden Flüssen. (Eine wichtige Arbeit von Grinstein & Wise (1987), in der störungstheoretische Effekte in höherer Ordnung studiert werden ist kürzlich erschienen. Diese Arbeit stützt den in III.1. diskutierten Ansatz). Indirekte analytische Bestätigungen von Zel'dovichs' Theorie sind z.B. die Arbeiten von Lynden-Bell (z.B. Lynden-Bell 1964), der durch die Beschreibung des anisotropen Kollaps eines rotierenden homogenen Mediums demonstriert, daß sphärisch-symmetrischer Kollaps ein nicht-generisches Verhalten einer durch Selbstgravitation kollabierenden Staubwolke ist, Icke (1973), der die Verstärkung anfänglicher Anisotropien in selbstgravitierenden Systemen studiert und Novikov (1975), der eine analytische Diskussion

der Deformationskinematik hinsichtlich eines anisotropen Kollaps durchführt. Ansonsten verwenden alle Autoren, die direkt oder indirekt Zel'dovichs' Folgerungen untermauern, *numerische* Methoden. Eine oft zitierte Arbeit stammt von Lin et al. (1965), die jene früheren Arbeiten von Lynden-Bell numerisch bestätigen und folgern, daß das Anwachsen der Exzentrizität homolog kollabierender Ellipsoide systematisch ist (vgl. auch die homogene Ellipsoid-Approximation von White & Silk (1979), die Arbeiten von Palmer (1981b) und Barrow & Silk (1981)).

Aufgrund dieser Einsichten wird von vielen Autoren immer wieder unterstrichen, daß das Studium des quasi-eindimensionalen Kollaps bereits die wesentlichen Daten der Strukturen liefert (vgl. z. B. Binney (1977)). Im Verlauf dieser Arbeit wird jedoch klar, daß dieser Optimismus eingeschränkt werden muß. Der "nicht-lokale Effekt" der Gravitation wird erst in höheren Dimensionen wirksam (vgl. insbesondere III.1.). Die hauptsächliche Rechtfertigung für die Anwendung von Zel'dovichs' Theorie auf die Entwicklung selbstgravitierender Medien wird heute in numerischen Simulationen des Szenariums, die seit 1980 durchgeführt wurden, gesehen. Auf sie wird im nächsten Abschnitt Bezug genommen.

I.3. Moderner Standpunkt der Theorie und numerische Simulationen des Szenariums

Das Jahr 1980 markiert etwa den Beginn einer bis heute andauernden Periode, in der die frühen analytischen Ansätze wieder aufgegriffen, in ihren Aussagen durch numerische Simulationsrechnungen bestätigt und in der Folge wiederum auf der Grundlage von numerischen Simulationen erweitert wurden. Die erhaltenen Aussagen verglich man dann auch mit vorhandenem Beobachtungsmaterial. Diese Beobachtungsdaten waren jedoch zu diesem Zeitpunkt für den dreidimensionalen räumlichen Überblick auf Skalen 40 - 160 Mpc noch nicht genügend spezifiziert, (vgl. I.5. zu neueren Arbeiten auf diesem Gebiet).

Die PANCAKE-Theorie, die bislang nur als Idee für eine mögliche Extrapolation der Entwicklung von Störungen in *baryonischer Materie* in das "nichtlineare Regime" existierte, wurde jetzt vor allem für die Beschreibung der nichtlinearen Entwicklung von nicht-baryonischer Materie herangezogen. Der Ausdruck *dunkle Materie* ("dark matter") wird für diese nicht-baryonische Komponente des Materieinhalts (bestehend aus schwach wechselwirkenden Teilchen mit nichtverschwindender Ruhmasse) oder auch für baryonische nichtleuchtende Materie verwendet. Für die dunkle Materie wurden z.T. "exotische" Kandidaten vorgeschlagen (z.B. supersymmetrische Partner bekannter Elementarteilchen), die je nach ihrer Ruhmasse auf verschiedenen räumlichen Skalen die Strukturbildung dominieren (vgl. die Übersichtsartikel von Primack (1984), Virginia Trimble (1987) und die kritische Betrachtung von Katherine Freese (1987)). Meist wird die Existenz einer oder mehrerer *massiver* NeutrinoKomponenten vorausgesetzt (Doroshkevich et al. 1981, Szalay & Bond 1983, Bond & Szalay 1983). Dann muß nur die *Masse* der Neutrinos experimentell bestätigt werden, damit das Szenarium gerechtfertigt ist; Experimente geben dazu aber noch keine eindeutige Aussage. Die Existenz nicht-baryonischer dunkler Materie ist die Voraussetzung dafür, daß die PANCAKE-Theorie ein zumindest qualitativ mit den Beobachtungen konsistentes Bild des Strukturbildungsprozesses auf großen Skalen liefert. Die Meinung, daß Szenarien ohne dunkle Materie auszuschließen sind, hat sich durchgesetzt. Es muß betont werden, daß die Betrachtung von massebehafteten Neutrinos nicht nur Feinheiten des Verständnisses von Strukturbildung bestimmt; vielmehr weiß man schon lange (Gerhstein, Zel'dovich 1966), daß eine Ruhmasse der Neutrinos von etwa $0,2\text{eV}/c^2$ bereits genügt, um die Gesamtmasse des Materieinhalts im Universum zu domi-

nieren. Die daraus resultierende dynamische Eigenschaft der Neutrino-Komponente ist die eines *Attraktors* für die baryonische Komponente auf der Skala der Neutrino-Fluktuationen (s.u.), d.h. daß das Verständnis der Dynamik des nur gravitativ wechselwirkenden "Neutrinouniversums" Voraussetzung für das Verständnis der Bildung sichtbarer baryonischer Strukturen ist. Neutrinos mit nicht-verschwindender Ruhmasse sind auch "attraktiv" für die Erklärung des Problems der *"fehlenden Masse"*, (*"missing mass"*): Neutrinos von $30\text{eV}/c^2$ Masse können die fehlende Masse in Galaxienhaufen bilden (Cowsik, McClelland, 1973; Bisnovatyi-Kogan, Novikov 1980); Annahmen, daß die Neutrinos die galaktischen Halos konstituieren (vgl. Melott 1983b) sind mit Rechnungen nicht verträglich, welche die Klumpung der Neutrinos (durch Berücksichtigung der Erhaltung des Phasenraumvolumens) auf galaktischen Skalen nicht gestatten (Tremaine, Gunn 1979, vgl. auch die neuere Arbeit von Ruffini & Song 1987). Schramm und Steigmann (1981) erläutern, daß baryonische dunkle Materie durchaus zur Erklärung der fehlenden Masse herangezogen werden kann, jedoch nicht auf der Skala von Galaxienhaufen. Die Neutrinoproblematik wurde auch von Seiten der Zel'dovich-Gruppe in einer Publikationsserie zusammengefaßt (Zel'dovich, Syunyaev 1980; Doroshkevich et al. 1980b; Doroshkevich et al. 1980c) sowie von vielen anderen Autoren von denen noch die neuere Arbeit von Cowsik & Ghosh (1987) erwähnt sei.

Das Neutrino-Szenarium hat auch einige Vorteile gegenüber baryondominierten Modellen. Diese ergeben sich im wesentlichen aus der Tatsache, daß Neutrinos zum Zeitpunkt der Rekombination außer gravitativ nicht mit Strahlung wechselwirken und somit durch Anisotropiemessungen der Hintergrundstrahlung weniger eingeschränkt sind (vgl. Doroshkevich et al. 1980b; Zabotin, Nasel'skii (1982); vgl. dazu den sogenannten "Sachs-Wolfe-Effekt", Sachs & Wolfe (1967)). Außerdem fällt die Einschränkung der relativen Dichte $\Omega_0 = \frac{\rho_H}{\rho_{Hc}}|_{z=0}$ auf $\Omega_0 \leq \frac{1}{10}$ durch Nukleosyntheseberechnungen bzgl. der Baryonkomponente hier fort, was zum Beispiel ein stärkeres Anwachsen der Fluktuation relativ zum (durch den Wert von Ω festgelegten) Hintergrundmodell erlaubt. Eingehendere Untersuchungen dieses neutrinodominierten Modells führten jedoch auf Schwierigkeiten, z.B. wenn man die *Pekuliar-Strömungsgeschwindigkeiten* beobachtbarer Galaxienhaufen mit theoretischen Voraussagen des Modells für realistische Kollapszeiten der PANCAKES vergleicht (Kaiser (1983); vgl. auch Szalay, Silk (1983), Vittorio, Turner (1987), Kaiser

(1987)). Andere quantitative Unstimmigkeiten wurden diskutiert; sie wurden teilweise z.B. durch Szenarien mit instabilen Neutrinos (vgl. Doroshkevich, Khlopov (1984); Doroshkevich, Klypin, Kotok (1986); Padmanabhan, Vasanthi (1987)) oder mit der Annahme eines “biasing” (d.i. die Annahme, daß Galaxien stärker konzentriert sind als die Massenverdichtung), vgl. Dekel & Rees (1987), Dekel (1983b), Rees (1987), Brown & Peebles (1987) behoben. Bei solchen “Problemen” des Szenariums ist jedoch Skepsis angebracht, da die zugrundeliegenden (groben) Rechnungen Feinheiten in den quantitativen Resultaten erklären sollen, die am Ende eines noch weitgehend unverstandenen nichtlinearen Prozesses durch (relativ zu diesem Anspruch) ungenaue Beobachtungskriterien bestimmt sind. Bevor nicht alle Konsequenzen der gravitativen Dynamik insbesondere im “nichtlinearen Regime” verstanden sind, müssen die gewonnenen Resultate vorläufig bleiben.

Untersucht man die gravitative Dynamik des (inhomogenen) Universums näher (dies ist das Hauptziel der vorliegenden Arbeit), so ist eine wichtige physikalische Eigenschaft des Neutrino-dominierten Szenariums die Behandlung der Materie als *Staub*, d.i. ein im Rahmen der Hydrodynamik beschriebenes Medium mit verschwindendem Druck. Diese Beschreibung ist gerechtfertigt, da auf der betrachteten räumlichen Skala der Fluktuationen (s.u.) die relevanten Geschwindigkeiten die thermischen Dispersionsgeschwindigkeiten der (auf der betrachteten zeitlichen Skala bereits nicht-relativistischen) Neutrinos dominieren. Die *räumliche Skala* der Fluktuationen sowie auch der Beginn der nicht-relativistischen Epoche sind bestimmt durch die Ruhmasse der Neutrinos: Z.B. ist die sog. “free streaming”-Länge der Neutrinos für $m_\nu \approx 30\text{eV}/c^2$ von der Größe eines Superhaufens:

$$l(m_\nu) = 40\text{Mpc} \frac{30\text{eV}}{m_\nu}; l(30\text{eV}) = 40\text{Mpc}. \quad (E9)$$

Die oben angegebene Länge gibt diejenige Distanz an, auf der eine Klumpung von Neutrinos verhindert wird. Sie läßt sich im Rahmen der relativistischen kinetischen Theorie für auf einem Hintergrund linearisierte Störungen in stoßfreier Materie berechnen (Bond & Szalay 1983, Stewart 1972, Gilbert 1966). Dieses “free-streaming” ist ein anschaulicher Ausdruck für einen der “Landau-Dämpfung” in der Plasmaphysik analogen Mechanismus (vgl. Lynden-Bell 1967). Erwähnenswert sind folgende wichtige und ergänzende Arbeiten zur kinetischen Theorie in diesem Kontext: Bel (1969), Bisnovatyi-Kogan & Zel’dovich (1970), Ehlers (1971), sowie Magalinskii (1972), Seliverstov (1974), Zakharov (1982), Khlebnikov (1982), Peebles (1982), Rozgacheva (1984) und Zabotin, Nasel’skii

(1985). Die durch den oben angesprochenen Mechanismus festgelegte Dämpfungsskala der Neutrinoﬂuktuationen ist das Analogon für die Dämpfungsskala, die durch Photonenviskosität im primordialen Strahlungs-Baryonen- Gemisch bestimmt ist (sog. “Silk-damping”, vgl. Silk (1968). Letzere ist die relevante Skala des traditionellen PANCAKE-Szenariums, die zur Zeit der Rekombination mit der oben angegebenen Skala für Neutrinoﬂuktuationen vergleichbar ist (die Beschreibung der Baryonen als *Staub* ist hier durch $L_{Silk} \gg L_{Jeans}$ gerechtfertigt, wobei L_{Jeans} die “Jeans-Länge” im Rahmen der linearisierten Störungstheorie bezeichnet.

Es ist klar, daß für das Endstadium einer gravitativen Materieverdichtung in beiden Modellen Druckkräfte relevant werden. Dies gilt insbesondere für Aspekte der Strukturbildung auf kleineren Skalen. Man hat versucht, den Effekt von Geschwindigkeitsdispersion im neutrinodominierten Modell (einem “dynamischen” Druck, der mit der Temperatur und für kleinere Skalen wächst) abzuschätzen. Mit Hilfe von eindimensionalen “kinematischen Modellen” (d.h. unter Vernachlässigung von Gravitation) wurde die zeitliche Entwicklung einer Geschwindigkeitsverteilung um die mittleren Geschwindigkeiten des Modells studiert (Zel’dovich, Shandarin 1982b; Shukurov 1981). Man folgert aus diesen Betrachtungen, gestützt auch durch numerische Resultate (vgl. Melott 1982, Melott 1983a und Fig.4i,j), daß sich auf großen Skalen der Effekt von Geschwindigkeitsdispersion auf das “Verschmieren” von Dichtesingularitäten reduziert, Kaustikstrukturen werden wie bei der Anwesenheit eines stochastischen Rauschens lediglich aufgeweicht, die Grundstruktur der Materieverteilung wird jedoch durch die Kaustik der Staublösung wiedergegeben (vgl. dazu auch die Analoga in der geometrischen Optik, diskutiert in I.4). Die Strukturbildung auf Skalen 40 - 160Mpc, auf die sich heute die Aussagen der PANCAKE-Theorie beschränken, läßt sich daher im wesentlichen durch das Studium von Staublösungen im Rahmen der Newtonschen Gravitationstheorie verstehen (Wir befinden uns allerdings nur durch die Beschränkung auf die nichtrelativistische Epoche des “Neutrinouniversums” sowie durch die Betrachtung von Skalen, die klein gegen die Horizontlänge sind innerhalb des Gültigkeitsbereichs der Newtonschen Theorie). Die PANCAKE-Theorie konstituiert sich damit aus solchen Staublösungen, spezifiziert auf Anfangsbedingungen, die eine (durch Rechnungen im Rahmen der kinetischen Theorie) bestimmte räumliche Skala auszeichnen. Letzteres unterscheidet dieses (sog. “adiabatische” oder genauer “isentropische”) Szenario

rium von Modellen mit einem sog. "isothermen" Fluktuationsspektrum, das Störungen auf sämtlichen Skalen enthält (vgl. die Darstellung dieser zwei grundsätzlich verschiedenen Theorien in Shandarin et al. 1983). Das "isentropische" PANCAKE-Szenarium ist durch Beobachtungen besser gestützt (vgl. die "Zell-Strukturen" und die *Kohärenz* der Pekuliar-Strömungsgeschwindigkeiten von Galaxienhaufen, vgl. I.5.). Peebles hat bereits in seinem Buch (Peebles 1980, II.21C) die Existenz einer Kohärenzlänge im primordialen Spektrum angezweifelt; das PANCAKE-Szenarium, das von der Annahme eines "cut-off" im Spektrum (d.h. die Unterdrückung kleiner Wellenlängen) wesentlich abhängt, ist aber gegenüber dem "isothermen Szenarium" bei der Erklärung von Beobachtungsdaten im Vorteil (vgl. I.5.).

Die weitere Entwicklung der im geschilderten Sinn vorgeprägten Strukturen wird neben den in I.1. dargestellten analytischen Ansätzen hauptsächlich durch numerische Simulationsrechnungen beschrieben. Man faßt das durch Rechnungen im Rahmen der linearisierten Theorie sich ergebende Spektrum als "Input-Spektrum" für das "nichtlineare Regime" auf; (es wäre natürlich befriedigender *ein* Szenarium zu entwickeln, das für beide "Regime" der Strukturbildung Gültigkeit hat, oder gar für alle zeitlichen Skalen; man hat jedoch bislang detaillierte dreidimensionale Rechnungen nur in der linearen Theorie durchgeführt).

Die *numerischen Simulationsrechnungen* wurden zunächst auf *eine* und *zwei* räumliche Dimensionen beschränkt, dabei noch in direktem Vergleich mit Aussagen, die aus den frühen analytischen Ansätzen gewonnen wurden (Doroshkevich et al. 1980a), gefolgt von Arbeiten von Melott (1982, 1983a, 1983b); in *drei* räumlichen Dimensionen zunächst wieder von Mitgliedern der Zel'dovich-Gruppe (Klypin, Shandarin 1983), dann in der Folge von vielen anderen Autoren (vgl. z.B. Joan Centrella & Melott 1983, eine Arbeit, die besonders deutlich die PANCAKES durch Plotten der Regionen niederer Dichte (der "voids" (vgl. I.5.)) sichtbar macht (Fig. 1j), Frenk et al. (1983), Davis et al. (1985); diese Arbeiten wurden in der Folgezeit noch ergänzt, e.g. von Dekel (1983a), Fry & Melott (1985), Barnes et al. (1985), Cavaliere et al. (1986), White et al. (1987) und Peebles (1987), insbesondere auch bezüglich globaler Betrachtungen der Strukturtopologie (Gott III. et al. 1986, Weinberg D.H. et al. 1987), zweikomponentiger Neutrino-Baryon-PANCAKES (Shapiro et al. 1983, Shapiro & Struck-Marcell 1985) sowie quantitativer Untersuchungen

der Strömungsgeschwindigkeiten von Galaxienhaufen relativ zum Hubble-Fluß (e.g. Vilumsen & Davis 1986). Die Autoren benutzen verschiedenartige Integrationsmethoden; die meisten Arbeiten verwenden N-Teilchen Simulationen auf dem Gitter, z.T. abgewandelt durch die sogenannte CIC (= cloud in cell)-Methode, die kollektive Effekte einer großen Anzahl von Teilchen simulieren soll (vgl. die Erläuterungen in Melott 1983a,b und die Zitate in Melott 1983a). Dabei wurde das Vlasov-Poisson-System unter Verwendung von Routinen, die für plasmaphysikalische Probleme entwickelt wurden, integriert (vgl. die strukturelle Verwandschaft der Gleichungen für die Entwicklung von Störungen auf einem Hintergrund mit Plasmagleichungen, erläutert von Doroshkevich et al. 1980a, vgl. auch den Abschnitt "Ausblick auf weiterführende Arbeiten"). Auch die Integration der hydrodynamischen Gleichungen für die Pekuliarbewegung gegen einen Hintergrund (wie in der vorliegenden Arbeit zugrundegelegt, vgl. II.1.) wurde unternommen (Shapiro et al. 1983, Shapiro & Stuck-Marcell 1985, Peebles 1987).

All diese Arbeiten zeigen ein hohes Maß an Übereinstimmung bezüglich der qualitativen Struktur, die sich im Verlauf des Kontraktionsprozesses einstellt: Eine, in zwei Dimensionen, netzartige (in drei Dimensionen zellenartige) Struktur mit Verdichtungen in ihren Vertices. Die Entwicklung dieser Struktur wird in I.5. genauer diskutiert. (Im Abschnitt II.8. dieser Arbeit gehe ich noch spezieller auf einige oben zitierte Simulationsrechnungen ein). Die Überzahl numerischer Arbeiten zeigt, daß man nicht erwartet, analytische Lösungen der Gleichungen zu erhalten. Analytische Lösungen haben aber wesentliche Vorteile gegenüber numerischen Simulationen, z.B. bezügl. des räumlichen Auflösungsvermögens von Strukturen insbesondere bei rasch räumlich variierenden Feldern (z.B. in der Nähe von Singularitäten). Außerdem beschreiben analytische Lösungen die Strukturbildung auch simultan auf verschiedenen räumlichen Skalen; die Darstellung solcher Wechselwirkungen von Skalen ist bei numerischen Simulationen schwierig (vgl. z.B. White 1987, der diesen Mangel im Zusammenhang mit "cold-dark-matter"-Szenarien unterstreicht). Um spezielle nichtlineare Effekte wie z.B. Solitonen (vgl. Götz 1988, Kates 1987) oder sog. "self-focusing"-Singularitäten (Kates 1986) in Materie mit Druck zu erfassen sind die bislang gebräuchlichen numerischen Simulationen unzureichend. Selbst Nichtlinearitäten in nur gravitativ wechselwirkender Materie sind nur über numerische "Tricks" zu erfassen (vgl. die CIC-Methode zur Simulation kollektiver Effekte der Vielteilchen-

Wechselwirkung). Diese Schwierigkeiten rühren von der Langreichweitigkeit der Gravitationskräfte her (vgl. die Beschreibung von numerischen Abschätzungen solcher nichtlokaler Effekte in Doroshkevich et al. 1973). Aus für die genannten Simulationsrechnungen repräsentativen Arbeiten von Shapiro et al. (1983), (vgl. dazu auch Shapiro (1984), Fig.1e-h), basierend auf einem Programm von Melott (1983b, Fig. 1a-d) und von Centrella & Melott (1983, Fig. 1e,f) wurden Illustrationen einer Zellenbildung in den Figurenappendix aufgenommen.

Eine hohe räumliche Auflösung von Strukturen wird insbesondere bei der Fragestellung einer *Fragmentierung* von PANCAKES wichtig. Das "PANCAKE-Bild" lebt von der Vorstellung, daß sich aufgrund von Annahmen über das Anfangsspektrum ("cut-off" von kürzeren Wellenlängen im Spektrum; Existenz einer Kohärenzlänge der Störungen), zunächst Strukturen von der Größe eines Superhaufens herausbilden, deren Entwicklung sich dann bis zur Entstehung von Proto-Galaxienhaufen verstehen läßt (vgl. I.5.). Danach ist die Frage nach der weiteren Entwicklung der Proto-Haufen auf das sog. "Fragmentierungsproblem" gerichtet, d.h. die Frage nach dem Mechanismus der dynamischen Herausbildung von Untereinheiten, auch bereits in früheren Phasen (z.B. im Stadium des Filamentkollaps, vgl. I.5.). Man kann vermuten, daß sich eine Fragmentierung aus dem Verständnis der vollen hydrodynamischen Entwicklung ergibt (Druck, Dissipation, Kühlungsmechanismen, Entropieproduktion, u.s.f.). Versucht man aber, diesen Prozeß beginnend von großen Skalen her zu verstehen, so ist zunächst wieder die Frage zu stellen, ob nicht schon gravitative Effekte diese Fragmentierung vorprägen und etwa die Skala der hierarchisch untergeordneten Struktur festlegen. Arbeiten zum "Fragmentierungsproblem" beruhen bislang auf Abschätzungen und Darstellung von Ideen. Wichtige Arbeiten in diesem Zusammenhang stammen von Layzer (1963), Sunyaev & Zel'dovich (1972), Palmer (1981) und Kolykhalov & Shandarin (1984); weitere Arbeiten zu diesem Thema kann man im Kontext hydrodynamischer Instabilitäten aber auch bei Problemen der Sternentstehung finden. Speziell auf den kosmologischen Kontext beziehen sich noch die Arbeiten von Doroshkevich, Shandarin (1974), Silk (1977), Doroshkevich et al. (1978), die einige Ideen und Ansätze zu diesem Problem beitragen. (Vgl. hierzu auch die Diskussion von Klassen strenger Lösungen in III.1.).

I.4. Arnold's Einfluß auf Ideen der Identifizierung von Strukturen auf großen Skalen mit der Struktur von Singularitäten; "kinematische Approximationen", Analogien der geometrischen Optik und Experimente

Eine Arbeit von Arnol'd, Shandarin und Zel'dovich (1982b; eine Verallgemeinerung dieser Arbeit für dreidimensionale Medien wurde begonnen (Roshanskii & Shandarin 1984), deren Abschluß ist derzeit in Vorbereitung) ist als interessanter analytischer Beitrag immer noch relativ unbeachtet (Teilresultate wurden z.B. in der Arbeit von Kolykhalov & Shandarin (1984) verwendet). Ich werde im folgenden zeigen, daß diese Arbeit qualitative Aspekte des PANCAKE-Szenariums wie es sich bis zu dieser Zeit darstellt, vereinfacht und dadurch durchsichtig und verständlich macht. Arnol'ds' Beiträge zu diesem Thema führten auch dazu, daß man z.B. die Bildung von Zell-Strukturen, die man in numerischen Simulationen (aber auch im Rahmen des analytischen Lösungsansatzes, vgl. II.8) findet, kinematisch verstehen kann. Arnol'd studierte detailliert eine 1-parametrische Familie von Abbildungen, die durch die allgemeine Lösung für die Bewegung eines kräftefreien Kontinuums (d.i. ein Medium aus "Teilchen", die sich unter dem alleinigen Einfluß ihrer Trägheit bewegen) dargestellt wird (Arnol'd 1982, nur in russisch):

$$\begin{aligned}\pi_t(\vec{X}; t) : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{X} &\rightarrow \vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \vec{V}(\vec{X})(t - t_0), \\ \vec{f}(\vec{X}, t = t_0) &=: \vec{X}, \vec{V} = \nabla_{\vec{X}} S.\end{aligned}\tag{E10}$$

Die Gradientenabbildung (E10) vom "Lagrangeschen" auf den "Eulerschen" Raum des Mediums ist ein Beispiel für eine Lagrange-Abbildung (vgl. dazu III.2.). Arnol'd studiert kritische Mengen (Singularitäten der Abbildung), deren Bilder (die Kaustik) sowie deren Metamorphosen im dreidimensionalen Raum. Arnol'ds' Arbeit enthält detaillierte und gut verständliche Abbildungen, auf die ich besonders hinweisen möchte.

Zel'dovich's Ansatz (E1) wurde als formale Analogie zu dieser Abbildung aufgefaßt. Zel'dovich's Überlegungen (obwohl diese sich auf ein selbstgravitierendes Medium beziehen) wurden aufgrund dieser Analogie auf das folgende vereinfachende Schema reduziert: Die Pekuliarbewegung relativ zum Hintergrund sei dargestellt durch die Bewegungsgleichung aus (E10), wobei der Zeitparameter entsprechend transformiert wird (Shandarin, Zel'dovich 1984, Shandarin, Zel'dovich 1988). Die *Reduktion* besteht im wesentlichen darin,

daß in der Abbildung (E10) nur eine Funktion spezifiziert wird (anstatt vier Funktionen bzw. zwei Potentiale als Anfangsbedingungen, die im allgemeinen Fall zur vollständigen Charakterisierung des selbstgravitierenden Mediums notwendig sind). Diese Vereinfachung wurde auch in numerischen Simulationen gemacht; man spricht dort nur von *vektorieller Verrückung* von Teilchen und berechnet die Verteilung der Dichtekontraste über die Kontinuitätsgleichung aus dem Pekuliargeschwindigkeits-Potential. Eine Aufhebung dieser Vereinfachung wird durch die exakte Behandlung im Rahmen der Gravitationstheorie (Kapitel II) nahegelegt (vgl. die kritischen Anmerkungen in II.7. und II.8.). Dieser vereinfachende Standpunkt drückt die Tatsache aus, daß man die z.B. in Simulationen gefundenen großräumigen Strukturen allein durch kinematische Modelle erzeugen kann. Man geht sogar so weit, daß man den relativen Einfluß der Gravitation für die interessierenden Strukturen als *qualitativ* unbedeutend einschätzt, der Gravitationseffekt also nur in der Transformation des Zeitparameters, (welche nur vom Hintergrundmodell abhängt), steckt. (Diese Überbetonung der Kinematik wird verständlich, wenn man sich vorstellt, daß Konvergenz von Trajektorien bereits eine Folge eines nicht-konstanten Geschwindigkeitsfeldes zur Zeit $t = 0$ ist und nach relativ kurzer Zeit (bevor der Einfluß der Gravitationskräfte stark wird, vgl. die Überlegungen zum Fehlermaß in I.2) zum Kollaps führt). Letzteres wird auch durch Analogien der geometrischen Optik verdeutlicht. Nicht nur der Begriff "Kaustik", sondern auch theoretische Einsichten über die Singularitätenstruktur gehen auf die geometrische Optik zurück (vgl. Arnol'd 1983a). Den Trajektorien entsprechen in optischen Medien Lichtstrahlen, dem Anfangsgeschwindigkeitsfeld ein nichtebener Spiegel oder ein gewölbtes lichtbeugendes Gebilde, den Orten hoher Dichte entsprechen Orte hoher Intensität. Tatsächlich ist diese Analogie auch im Rahmen der Astrophysik zu finden: Die heutigen Entwicklungen in der *Theorie der Gravitationslinsen* entsprechen den Vorstellungen des PANCAKE- Szenariums weitgehend (vgl. II.8.). Die geometrisch-optische Analogie hat die Moskauer Gruppe dazu veranlaßt, Experimente (sog. "optische Simulationen") durchzuführen, welche die Bildung der PANCAKES und deren Vernetzung veranschaulichen (Zel'dovich et al. 1983). Diese Experimente kann jeder Leser in einem hinreichend großen mit Wasser gefüllten Gefäß nachvollziehen: Bei entsprechenden Lichtverhältnissen werden die (auf einer gewissen Skala kohärenten) Oberflächenwellen auf eine netzartige Kaustikstruktur am Wassergrund abgebildet. Shandarins' Foto einer "optischen

Simulation" des PANCAKE-Szenariums zeigt eine Erscheinung, die man in jedem Freibad beobachten kann (Figur 2).

Solche Analogien und in der Literatur verbreitete Abwandlungen von Zel'dovichs' Ansatz im Sinn einer "kinematischen Approximation" (vgl. Peebles 1980 sec. II.21B) sollen nicht darüber hinwegtäuschen, daß sowohl die analytische Form der ursprünglichen Extrapolation der linearen Theorie, als auch die Aussagen der Theorie der Lagrange-Singularitäten (vgl. I.5. und III.3.) sich auf selbstgravitierende Medien beziehen sollen. Obwohl das Kapitel II die Form des Ansatzes im Rahmen einer Lösungsklasse mit Selbstgravitation verifiziert, bin ich nicht von dieser kinematischen Vereinfachung überzeugt (vgl. III.1.). Die Theorie der Lagrange-Singularitäten läßt sich jedoch auch auf selbstgravitierende Medien anwenden, was für die in dieser Arbeit vorgestellten Klassen nachgewiesen wird (vgl. III.3.). Neben den genannten Arbeiten möchte ich noch auf einige Arbeiten von Arnol'd hinweisen, die Anmerkungen zum PANCAKE-Szenarium enthalten:

Arnol'd (1984, ch.9), Arnol'd (1983a, §6), Arnol'd (1976, sec.7.8), Arnol'd et al. (1982a). Das erstgenannte Zitat ist ein populäres Büchlein über Katastrophentheorie, das letztgenannte Zitat ist ein Buch, in dem die wichtigsten Resultate der Theorie der Lagrange-Singularitäten zusammengefaßt sind. Da diese Theorie historisch aus der sog. "Katastrophentheorie" erwachsen ist, sind viele z.T. auch sehr anschauliche Beiträge zur Singularitätsstruktur im Rahmen der "Katastrophentheorie" entstanden. Besonders interessant erschien mir die hierarchische Ordnung der Kaustiken (die in der Vorläufertheorie sogenannte "Selbstorganisation der Katastrophen") und deren Metamorphosen (die hierarchische Struktur unterscheidet räumliche Strukturen und zeitliche Entwicklung von Kaustiken nicht). Ich denke, daß diese Arbeiten, die heute noch wenig beachtet sind, entscheidende Hinweise für das Verständnis von hierarchischer Ordnung enthalten und somit auch grundlegende Denkansätze für Theorien der Strukturbildung im Universum darstellen.

I.5. Zellen- und Netzstrukturen, Filamente und massereiche Proto-Galaxienhaufen. Analytische Begründung für ihre Entstehung und Bestätigung durch Beobachtungen

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Aspekte der *qualitativen* Strukturbildung im Licht der Arnol'dschen Arbeiten erläutert. "Wichtig" heißt hier, daß diese Aspekte einmal zum Verständnis der Strukturbildung beigetragen haben und zum anderen auch durch heutige Beobachtungen gestützt werden. Am Schluß dieses Abschnitts wird deshalb eine Übersicht über neuere Arbeiten, die sich mit beobachtbaren Strukturen auf großen Skalen befassen, zusammengestellt.

Der Zusammenhang zu Singularitätenstrukturen wird klar, wenn man folgendes Beispiel für die Entwicklung eindimensionaler Inhomogenitäten betrachtet. Wir gehen von der Abbildung (E10) aus und studieren die Bewegungsgleichung:

$$x_1 = f_1(X_1, t) = X_1 + V_1(X_1)(\zeta - \zeta_0); z.B. : \zeta \propto t^{\frac{2}{3}}. \quad (E11)$$

Wir machen für die Anfangsverteilung von V_1 die Annahme, daß diese auf einer gewissen Skalenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ glatt ist. Damit soll die Kohärenz der Störungen auf dieser Skala modelliert werden. Die Amplitude sei auf einem hinreichend großen Gebiet beschränkt auf den Wert S_0 . Das einfachste Modellspektrum, das diesen Kriterien genügt, ist:

$$V_1(X_1) = S_{1,1} = S_0(\sin(kX_1) + C), C = \text{const.} \quad (E11a)$$

S ist das Geschwindigkeitspotential. Wir setzen (durch Umdefinition von X_1), $k := 1$. Die durch (E11) gegebenen Trajektorien kreuzen sich zuerst an den Orten $X_i = 0 \pm n \cdot \pi$. Dort ist auch die Dichte zum ersten Mal singulär:

$$\rho \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad f_{1,1} = 1 + S_{1,1}(\zeta_c - \zeta_0) = 0. \quad (E11b)$$

Das Geschwindigkeitsfeld wird an diesen Orten von der kritischen Zeit ζ_c an mehrdeutig, die Abbildungen (E10) sind singulär. Entwickeln wir das Geschwindigkeitsfeld um den kritischen Punkt $X_c = 0$, so erhalten wir:

$$V_1 \approx S_0 \left(X_1 - \frac{(X_1)^3}{6} + C \right). \quad (E12a)$$

Die Bewegungsgleichung (E11) definiert mit (E12a) in der Umgebung des kritischen Punkts $(X_c = 0, \xi_c = \xi_0 - \frac{1}{S_0})$ eine Fläche im (x_1, X_1, ξ) -Raum. Diese Fläche enthält “Gleichgewichtspunkte” des in der Katastrophentheorie bekannten “cusp-Potentials”:

$$V_{cusp} := \frac{X_1^4}{4!} + \tau_1 \frac{X_1^2}{2!} + \tau_2 X_1 + \text{const.} \quad (E12b)$$

Die Lagrange-Koordinaten erscheinen als “Ordnungsparameter”, die Eulerschen Koordinaten und die Zeit als “Kontrollparameter”:

$$\tau_1 := \frac{\xi_c - \xi}{\xi_0 - \xi_c}; \tau_2 = x_1 - \frac{C}{\xi_0 - \xi_c}. \quad (E12c)$$

Die Fläche zeigt beim Wechsel des Vorzeichens von τ_1 die typische Form der “cusp-Katastrophe”, sie ist implizit durch $\frac{\partial V_{cusp}}{\partial X_1} = 0$ definiert.

Im Rahmen der Theorie der Lagrange-Singularitäten (vgl. I.4. und III.2.) spricht man von einer einparametrischen Familie von Lagrange-Mannigfaltigkeiten, deren lokale Darstellung z.B. durch die (singuläre) Darstellung $\frac{\partial V_{cusp}}{\partial X_1} = 0$ gegeben ist; das Potential V_{cusp} entspricht einer Legendretransformierten der “Normalform” der Singularität vom Typ A_3 (vgl. die Klassifikation in Arnol’d 1982, vgl. Arnol’d et al. 1982a und die Schlußbemerkung des Abschnitts III.2. zur regulären Darstellung der Lagrange-Mannigfaltigkeiten). Der Satz (x_1, X_1) bildet lokale Koordinaten auf der Lagrange-Mannigfaltigkeit, x_1 ist die (verallgemeinerte) Ortskoordinate, X_1 die verallgemeinerte Impulskoordinate im erweiterten “Phasenraum” $x_1, X_1; \xi$). Der Schnitt der Lagrange-Fläche $\frac{\partial V_{cusp}}{\partial X_1} = 0$ mit der Ebene $X = X_c$ ergibt ein Bifurkationsdiagramm als Ausdruck der Änderung der Wurzelstruktur der kubischen Gleichung $\frac{\partial V_{cusp}}{\partial X_1}|_{X=X_c} = 0$. Die Projektion der kritischen Punkte auf die “Eulersche Raumzeit” ergibt die Kaustik (in diesem Fall die semikubische Neilparabel); die Projektion der Trajektorien (auf der Fläche im erweiterten Phasenraum) auf die “Eulersche Raumzeit” hat als Bild die Flüssigkeitspfade. Diese sowie das qualitative Verhalten der Dichte sind in Figur 4 im Vergleich zu einer numerischen Simulation des eindimensionalen Falls veranschaulicht.

Die oben durchgeführte Diskussion entspricht etwa der Diskussion von Zel’dovich (1970a); ich benutzte anstatt des Eigenwerts $\alpha := \frac{\partial^2 S}{\partial X_1^2}$ die Formulierung im Rahmen der Katastrophentheorie, die direkt den Übergang zur Theorie der Lagrange-Singularitäten verdeutlicht. In einer räumlichen Dimension gibt es nur die Singularität vom Typ A_2 .

In zwei räumlichen Dimensionen (sowie in der zweidimensionalen Raumzeit des vorher diskutierten Falls) tritt der Typ A_3 hinzu.

Die Entwicklung der Singularitätenstruktur eines zweidimensionalen Mediums wird in der Arbeit von Arnol'd et al. (1982) mit Hilfe einer numerischen Simulation untersucht. Eine Darstellung dieser Entwicklung, eingebettet in die globale "netzartige" Struktur der Materieverdichtungen, wird in II.8. im Rahmen einer analytischen Approximation gewonnen. Durch diese Untersuchung läßt sich auch die Bildung der "Netzstruktur" detailliert verstehen. Diese geht im wesentlichen darauf zurück, daß die lokal entstandenen PANCAKES durch das "Brechen" einer PANCAKE-"Wand" (hier: Singularität vom Typ A_4) zu (transversalen und nicht-transversalen) Überschneidungen verschiedener PANCAKES über die Distanz der Kohärenzlänge hinweg führen, vgl. Figur 6.

In drei räumlichen Dimensionen (bzw. in der dreidimensionalen Raumzeit) gibt es neben der PANCAKES, die als Dreistromsystem definiert werden (vgl. Fig.4) bereits drei weitere Typen (vgl. wiederum die Klassifikation von Arnol'd (1982), Arnol'd et al. (1982a), z.B. die nicht-transversale Verschmelzung zweier PANCAKES). Die in drei räumlichen Dimensionen entstehende "Zellstruktur" wird in einer Art "zeitinvertierten hierarchischen Klumpung" in der Folge weiter differenziert: Es entstehen zunächst (durch die Dominanz des zweitgrößten Eigenwerts des Deformationstensors (vgl. I.2.)) Materiekonzentrationen in der "Zellwand" zu filamentartigen Strukturen; schließlich kollabieren die Filamente (aufgrund eines dritten positiven Eigenwerts zu Klumpen in der unmittelbaren Umgebung des Entstehungsorts der PANCAKE-Singularitäten. Dort sammelt sich die meiste Materie im Lauf der Zeit an und bildet auf der betrachteten Skala einen (entsprechend der aktuellen Interpretation) heute beobachtbaren, massereichen Galaxienhaufen. Es wird angenommen, daß die Zellstruktur zur heutigen Zeit noch besteht (vgl. die aktuellen Beobachtungen, s.u.), daß also die Materie in diesem Sinn die eingeprägte Struktur des Spektrums noch widerspiegelt und sich deshalb nicht zum jetzigen Zeitpunkt in einem asymptotischen Endstadium befindet. Der oben erläuterte hierarchische Ordnungsprozess wurde im Rahmen einer numerischen Simulation verifiziert (Shandarin & Klypin 1984); es ist möglich, diesen Prozeß auch am analytischen Modell zu veranschaulichen, vgl. II.8. (Figuren 5 und 6), (Buchert 1988a). Wegen des Bestehens der Zellstruktur zur heutigen Zeit, (die auch zur Festlegung der Parameter des Fluktuationsspektrums dient), muß man Fragmentierungs-

prozesse auf kleineren Skalen bereits in der Phase des Filamentskollaps bzw. noch früher erwarten. Um die Existenz von Quasaren zu erklären, muß andererseits die Materie hinreichend früh kollabiert sein. Numerische Simulationen zeigen, daß z.B. die zweidimensionale Netzstruktur über längere Zeit bestehen bleibt, länger als im analytischen Modell, vgl. Melott 1983b und II.8., (vgl. Fig.1a-d mit Fig. 6). Über den Zusammenhang von im Spektrum vorgeprägter Struktur und phänomenologischer Aspekte der Zellstruktur sind einige Arbeiten erschienen (Zel'dovich 1982, Zel'dovich & Shandarin 1982a, Shandarin & Zel'dovich 1983, Shandarin & Zel'dovich 1984).

Damit ist die Entstehung der häufig diskutierten supergalaktischen Strukturen wie Zellen, Filamente und (massereiche) Galaxienhaufen analytisch im Rahmen der "kinematischen Approximation" erklärbar, ebenso die als "voids" bezeichneten massearmen, fast sphärisch-symmetrischen Zwischenräume von der Größenordnung der Kohärenzlänge. Dieses Bild hat in jüngster Zeit Unterstützung durch Beobachtungen erfahren. Einige Arbeiten zu diesem Thema sollen zum Abschluß dieses Kapitels noch erwähnt werden:

Eine wichtige Arbeit in diesem Zusammenhang (die durch die theoretische Voraussage motiviert wurde) stammt von deLapparent et al. 1986, die deutliche Hinweise auf die Existenz flächenhaft konzentrierter Materie auf großen Skalen enthält, vgl. Figur 3. Man sollte betonen, daß die Autoren bereits nach solchen Strukturen suchen, die Arbeit wurde kritisiert, weil sie ein verhältnismäßig untypisches Gebiet herausgreift. Dies hängt aber unmittelbar mit der problematischen Meßbarkeit der Strukturen zusammen. Diskussion über ein brauchbares quantitatives Maß von Struktur wurden ausgelöst (vgl. z.B. die Arbeit von Shandarin (1983), die auf der Perkolationstheorie basiert oder die Diskussion von Fraktalen in diesem Zusammenhang (vgl. die neuere Arbeit von Jones et al. (1987)). Trotz vorhandener pessimistischer Urteile über die Beobachtungen supergalaktischer Strukturen (z.B. wird in der Arbeit von Barrow & Bhavsar (1987) die Verbesserung der Methoden zur Mustererkennung in der Auswertung von Beobachtungsdaten gefordert, um nicht einem Irrtum analog der "Mars-Kanäle" aufzusitzen), sind Bestätigungen der vorausgesagten Strukturen i.A. anerkannt. Eine Übersicht über Beobachtungsergebnisse auf großen Skalen ist z.B. Oorts Artikel (1983). Frühere Artikel, die sich auf die Anisotropie von Superhaufen beziehen, stammen von de Vaucouleurs (vgl. z.B. de Vaucouleurs 1978) und Schipper, King (1978) sowie Thompson, Gregory (1978). Direkt auf das PANCAKE-Szenarium beziehen

sich die Arbeiten von Jõeveer und Einasto (1978), Doroshkevich & Shandarin (1978b), Dekel (1985) und eine ausführliche Übersichtsreihe, von der hier die neuesten Artikel (Teile V, VI) zitiert werden (Einasto & Einasto 1987, Einasto et al. 1986) sowie eine Arbeit, welche die Beobachtungsdaten in der Art eines Dichtekonturplots auswertet (Guberman et al. 1983). Weitere Arbeiten beziehen sich auf die Verteilung von Quasaren auf großen Skalen (z.B. You-Yuan Zhou et al. 1986), die Orientierung der galaktischen Achsen in Superhaufen, was Aufschluß über die Dynamik innerhalb PANCAKES gibt (Flin & Godlowski 1986) und das Pekuliar-Geschwindigkeitsfeld (Lilje et al. 1986). Folgende, vor allem neuere Arbeiten sind in diesem Zusammenhang noch interessant: Tifft & Gregory (1978), Nolthenius & White (1987), Flin (1987), Ciardullo (1987), Rhee & Katgert (1987), Batuski et al. (1987) sowie zwei neuere Konferenzbeiträge von Bahcall (1987) und Margaret Geller et al. (1987).

II. STRENGE BEGRÜNDUNG UND VERALLGEMEINERUNG ANALYTISCHER GRUNDLAGEN DER STANDARDTHEORIE

II.1. Die Grundgleichungen

– Eulersche Form der Gleichungen:

Die Entwicklung einer Flüssigkeit mit verschwindendem Druck in ihrem selbsterzeugten Gravitationsfeld (“selbstgravitierender Staub”), charakterisiert durch ein Dichtefeld $\rho(\vec{x}, t)$, ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x}, t)$ und die Gravitationsfeldstärke $\vec{g}(\vec{x}, t)$ wird in der vorliegenden Arbeit durch das Euler-Poisson-System beschrieben. In einem nicht-rotierenden Koordinatensystem, das den physikalischen Raum aufspannt (Eulersche Beschreibung) lauten die durch ein kosmologisches Glied $\Lambda = \text{const}$ erweiterten Gleichungen:

$$\vec{v}_t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{g} \quad (1a)$$

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1b)$$

$$\nabla \times \vec{g} = 0 \Rightarrow \vec{g} = -\nabla \Phi \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \vec{g} = \Lambda - 4\pi G\rho \quad (1d)$$

$$\rho > 0. \quad (1e)$$

Die Gleichungen (1c) und (1d) sind der Poissongleichung für das Gravitationspotential Φ äquivalent. In der Darstellung (1) wurde die Gravitationsfeldstärke $\vec{g}$ mit dem Beschleunigungsfeld identifiziert, da die Gravitation die einzige Kraft in diesem Problem ist, (dies drückt auch die Äquivalenz von schwerer und träger Masse aus). Die Gleichungen sind “translations-kovariant” (bzgl. zeitabhängiger Translationen), vorausgesetzt Φ bzw. $\vec{g}$ wird entsprechend transformiert (Heckmann & Schücking 1955, 1956).

– Lagrangesche Form der Gleichungen:

Für die Bestimmung von Lösungen des Systems (1) erweist es sich als nützlich, Lagrangesche Koordinaten einzuführen. Damit betrachtet man analog zur Punktmechanik ein Kontinuum von Massenpunkten. Das “Lagrange-Bild” wurde bislang insbesondere für

die Konstruktion von Lösungen in hydrodynamischen Problemen unterschätzt und nur für die Behandlung eindimensionaler Probleme in einfachen Fällen als vorteilhaft angesehen. Es wurde in numerischen Problemstellungen in diesem Kontext angewendet (vgl. z.B. Shapiro & Struck-Marcell 1985); die Möglichkeit der Lösung auch von komplexen analytischen Problemen im Rahmen der Lagrange-Darstellung wird durch die vorliegende Arbeit offensichtlich.

Lagrangesche Koordinaten sind definiert als die "Markierungen" $\vec{X}$ von Integralkurven $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t)$ des Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}(\vec{x}, t)$:

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \vec{v}(\vec{f}, t); \quad \vec{f}(\vec{X}, t = t_0) = \overset{o}{\vec{f}}(\vec{X}) =: \vec{X}. \quad (2a)$$

Die Bezeichnung $\frac{d}{dt}$ (oder ein Punkt) steht für die totale (Lagrangesche) Zeitableitung und ist durch den folgenden Operator definiert:

$$\frac{d}{dt} := \partial_t + \vec{v} \cdot \nabla. \quad (2b)$$

Die Integralkurven werden als Pfade der Flüssigkeits-"Teilchen" im "Eulerschen Raum" interpretiert, welche sich anfänglich im Punkt " $\vec{X}$ " befinden. Für jede Vektorfunktion $\vec{F}(\vec{x}, t)$ gilt:

$$\dot{\vec{F}}(\vec{x}, t)|_{\vec{X}=const} = \dot{\vec{F}}(\vec{f}(\vec{X}, t), t) = \partial_t \vec{F}(\vec{X}, t); \quad (2c)$$

$\vec{x}$ ist nun eine abhängige Variable und spielt die Rolle eines zusätzlichen Vektorfeldes im "Lagrange-Bild". Dieses Feld legt die Transformation zurück in das "Euler-Bild" fest und bestimmt vollständig die Dynamik der Flüssigkeit, solange die Umkehrung dieser Transformation existiert, d.i. für eine nicht-singuläre Jakobimatrix:

$$J_{ik}(\vec{X}, t) := \frac{\partial f_i}{\partial X_k}; \quad \det(J_{ik}) =: J > 0. \quad (3a)$$

Folgende Entwicklungsgleichungen gelten für die Jakobische Matrix und deren Determinante:

$$\dot{J}_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial X_k} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} J_{jk}; \quad \dot{J} = \nabla \cdot \vec{v} \, J. \quad (3b)$$

Für weitere Einzelheiten der Lagrange-Darstellung vgl. Lamb (1932), Serrin (1959) und Zel'dovich, Myshkis (1973).

Mit Hilfe der Entwicklungsgleichung (3b) erhält man ein Integral der Kontinuitätsgleichung (1b) über $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\nabla \cdot \vec{v} = -\frac{\dot{J}}{J}$, d.h.,

$$\rho J = \rho(\vec{X}, t_0) J(\vec{X}, t_0) = \rho(\vec{X}, t_0) =: \dot{\rho}(\vec{X}). \quad (4)$$

Drückt man noch den Nablaoperator durch Ableitungen nach den X_i aus, so läßt sich das System (1) in folgende Form bringen:

$$\rho = \rho_0(\vec{X}) J^{-1} \quad (5a)$$

$$\vec{g} = \dot{\vec{v}} = \vec{\dot{f}} \quad (5b)$$

$$g_{i,k} J_{kj}^{-1} = g_{j,k} J_{ki}^{-1} \quad (i \neq j) \quad (5c)$$

$$g_{i,k} J_{ki}^{-1} = \Lambda - 4\pi G \rho. \quad (5d)$$

Setzt man nun die ersten beiden Gleichungen des Systems (5) in die letzten beiden ein, so ergibt sich ein System von vier Gleichungen für die Jakobische Matrix:

$$\vec{J}_{ik} J_{kj}^{-1} = \vec{J}_{jk} J_{ki}^{-1} \quad (i \neq j) \quad (6a, b, c)$$

$$\vec{J}_{ik} J_{ki}^{-1} = \Lambda - 4\pi G \rho_0(\vec{X}) J^{-1}. \quad (6d)$$

Bezeichnet man noch die Funktionaldeterminante dreier Funktionen $h_1(\vec{X}, t)$, $h_2(\vec{X}, t)$ und $h_3(\vec{X}, t)$ mit

$$(h_1, h_2, h_3) := \frac{\partial(h_1, h_2, h_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}, \quad (7)$$

so erhält das System schließlich eine kompakte und für die Betrachtungen in dieser Arbeit nützliche Form:

$$\epsilon_{pq} [j \frac{\partial(\vec{f}_i), f_p, f_q}{\partial(X_i, X_p, X_q)}] = 0 \quad (8a, b, c)$$

$$\epsilon_{abc} \frac{\partial(\vec{f}_a, f_b, f_c)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = 2\Lambda \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} - 8\pi G \rho^0. \quad (8d)$$

Anmerkung:

Es gilt $J_{ik} = f_{i,k}$; $J_{ab}^{-1} = ad(J_{ab}) J^{-1} = \frac{1}{2J} \epsilon_{ajk} \epsilon_{blm} J_{lj} J_{mk}$ ist die inverse Jakobimatrix.

– Die Gleichungen für Störungen eines homogen-isotropen Hintergrundes:

Für die Anwendung auf PANCAKE-Szenarien ist die Anpassung des Gleichungssystems (1) an die kosmologische Situation, die im Teil “Motivation” dargelegt wurde, von großem Nutzen. Wir sind interessiert an Bewegungen als Folge anfänglicher Geschwindigkeits- und Dichtestörungen eines homogenen, isotrop expandierenden Modellkosmos. Der Grund für die Anpassung liegt also in der gesuchten Form der Lösung als Superposition einer homogenen Lösung des Systems (1) und einem “pekuliaren” Anteil der Bewegung, so daß die Superposition dieser Anteile wieder eine Lösung des Systems (1) ist.

Wir rufen in Erinnerung, daß eine räumlich homogene Quelle der Gravitationsfeldgleichungen $\rho_H(t)$ das System (1) mit

$$\rho_H(t) = \rho_{H0} / \det(f_{Hi,k}) \quad (9a)$$

löst, wobei $(f_{Hi,k})$ der Tensor einer homogenen Deformation des Staubmediums ist:

$$f_{Hi} = a_{ij}(t) X_j. \quad (9b)$$

Wir beschränken uns auf isotrope homogene Deformationen $a_{ij}(t) = a(t)\delta_{ij}$, wobei $a(t)$ der Friedmannschen Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\dot{a}^2 + \text{const}}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_H + \Lambda}{3}. \quad (9c)$$

Für nicht-verschwindende Integrationskonstanten nennen wir Lösungen von (9c) (im Sinn der entsprechenden Einsteinschen Lösungen) räumlich “gekrümmte” Hintergründe, (vgl. Appendix A). (9b) impliziert, daß Flüssigkeitspfade $\tilde{f}_H$ eines Fundamentalbeobachters im betrachteten Modelluniversum Integralkurven linearer Geschwindigkeitsfelder $\vec{v}_H$ sind; außerdem ist wegen (1a) die Gravitationsfeldstärke des Hintergrunds dann linear:

$$\vec{v}_H = \frac{\dot{a}}{a} \vec{x}; \quad \vec{g}_H = \frac{\ddot{a}}{a} \vec{x}. \quad (9d, e)$$

Die *lineare Theorie* der Entwicklung gravitativer Instabilitäten zeigt, daß die Lösungen (9) gegen Geschwindigkeits- und Dichtestörungen instabil sind (Lifshitz 1946, Lifshitz & Khalatnikov (1963)). Um das Verhalten von Störungen, die zu beliebiger Größe anwachsen können, zu beschreiben, suchen wir Lösungen der Form:

$$\vec{f} = \vec{f}_H + \vec{p}. \quad (10)$$

Wir transformieren das System (1) durch Einführung eines beschleunigten Eulerschen Koordinatensystems $\{q_i\}$ so, daß es mit dem Lagrangeschen Koordinatensystem $\{X_i\}$ des Hintergrunds zur Deckung kommt:

$$\vec{q} := \frac{\vec{x}}{a(t)} . \quad (11)$$

Außerdem führen wir den Dichtekontrast $\delta(\vec{q}, t)$ als ein Maß für die Abweichung von der Hintergrunddichte ρ_H ein, definiert durch

$$\rho(\vec{q}, t) =: \rho_H(1 + \delta) , \quad (12a)$$

sowie die Pekuliarfelder

$$\vec{u}(\vec{q}, t) := \vec{v} - \vec{v}_H , \quad (12b)$$

$$\vec{w}(\vec{q}, t) := \vec{g} - \vec{g}_H . \quad (12c)$$

Das resultierende System entsteht dann durch Abspaltung von Termen, welche durch die homogene Deformation (9) gelöst werden. Es beschreibt den pekuliaren Anteil der gesuchten Bewegung (Peebles 1980):

$$\vec{u}_t|_q + \frac{1}{a}(\vec{u} \cdot \nabla_q)\vec{u} + H\vec{u} = \vec{w} \quad (13a)$$

$$\delta_t|_q + \frac{1}{a}\nabla_q \cdot (\vec{u}(1 + \delta)) = 0 \quad (13b)$$

$$\nabla_q \times \vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{w} =: -\frac{1}{a}\nabla_q \phi \quad (13c)$$

$$\nabla_q \cdot \vec{w} = -4\pi G \rho_H \delta a \quad (13d)$$

$$\delta > -1 \quad (13e)$$

$$(9c) \Leftrightarrow \quad (13f)$$

Das pekuliare Gravitationspotential ϕ , dessen Quelle der Dichteexzess $\rho_H \delta$ ist, ist durch

$$\phi(\vec{q}, t) := \Phi - \Phi_H; \quad \Phi_H = -\frac{1}{2}a\ddot{a}|\vec{q}|^2 \quad (12d)$$

definiert. Ein weiterer Vorteil dieser Transformation ist, daß die kosmologische Konstante Λ keine Quelle des Pekuliarpotentials ϕ ist, sondern nur in das Hintergrundmodell eingeht,

(vgl. Peebles 1980, sec.II.7.). Im Fall verschwindender Zeitabhängigkeit des Hintergrunds geht das System (13) zusammen mit der Rücktransformation aus (12) in das System (1) über, (Übereinstimmung der Koordinatensysteme $\{q_i\}$ und $\{X_i\}$). Das kosmologische Glied kann als statischer Hintergrund aufgefaßt werden; das System (1) beschreibt dann die Entwicklung von Störungen in einem "Einstein-Kosmos":

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_0) := 1 \\ \Rightarrow 4\pi G\rho_H &= \Lambda, \quad \vec{u} = \vec{v}, \quad \vec{w} = \vec{g}, \quad \vec{q} = \vec{x}; \end{aligned} \quad (14)$$

beachte, daß allgemein gilt:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda - 4\pi G\rho_H}{3}; \quad \rho_H = \frac{\overset{\circ}{\rho}_H}{a^3}.$$

Eine beabsichtigte Konsequenz der Transformation (11), (12) ist, daß Lösungsklassen, deren Integralkurven $\vec{f}$ als Superposition (10) darstellbar sind, die isotropen dreidimensionalen Hintergrundlösungen als Unterklasse enthalten; dies ist im allgemeinen für *spezielle* Lösungsklassen des untransformierten Systems nicht wahr, da die Hintergründe den allgemeinen Gleichungen genügen, (vgl. z.B. die Lösungsklasse des Appendix B). Gleichzeitig erleidet aber die Klasse die Einschränkung, daß die mittlere Dichte einem isotropen Expansionsgesetz gehorcht.

Im folgenden geben wir noch die Lagrangesche Form des Pekuliarsystems (13) an. Nach Konstruktion sind die Integralkurven $\vec{f}$ der Superposition (10) Lösungen des Lagrange-schen Systems (8). Wir führen nun Integralkurven $\vec{F}$ des skalierten Pekuliargeschwindigkeitsfeldes $\frac{\vec{u}}{a}$ ein und definieren damit die inhomogene Deformation $\vec{q} = \vec{F}(\vec{X}, t) = \frac{1}{a}\vec{f}(\vec{X}, t)$:

$$\dot{\vec{F}} = \frac{\vec{u}(\vec{F}, t)}{a(t)}; \quad \vec{F}(\vec{X}, t_0) =: \overset{\circ}{\vec{F}}(\vec{X}) =: \vec{X}. \quad (15a)$$

Das Integral der Kontinuitätsgleichung (1b), vgl. (4) schreiben wir in der Gestalt:

$$\rho = \frac{\overset{\circ}{\rho}(\vec{X})}{\det(f_{i,k})} = \frac{\overset{\circ}{\rho}_H(1 + \overset{\circ}{\delta}(\vec{X}))}{a^3 \det(F_{i,k})} = \rho_H(t) \frac{1 + \overset{\circ}{\delta}(\vec{X})}{\det(F_{i,k})} = \rho(\vec{X}, t). \quad (15b)$$

Die Lagrangesche Form der Störungsgleichungen lautet damit:

$$\ddot{F}_{i,k} F_{k,j}^{-1} = \ddot{F}_{j,k} F_{k,i}^{-1} \quad (i \neq j), \quad (16a, b, c)$$

$$\ddot{F}_{i,k} F_{k,i}^{-1} + 2H \dot{F}_{i,k} F_{k,i}^{-1} = -4\pi G(\rho - \rho_H). \quad (16d)$$

$\Leftrightarrow$

$$\epsilon_{pq}[j] \frac{\partial(\ddot{F}_i, F_p, F_q)}{\partial(X_j, X_p, X_q)} = 0 \quad ; \quad \rho = \frac{\rho_H(1 + \overset{\circ}{\delta})}{\det(F_{i,k})} ; \quad (17a, b, c)$$

$$\epsilon_{abc} \left(\frac{\partial(\ddot{F}_a, F_b, F_c)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} + 2H \frac{\partial(\dot{F}_a, F_b, F_c)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} \right) = -8\pi G \rho_H (1 + \overset{\circ}{\delta} - \frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)}). \quad (17d)$$

Eine vereinfachte Form dieses Systems ist für die Bestimmung von Zwangsbedingungen nützlich (vgl. Appendix C). Die Vereinfachung beruht auf einer Skalierung der Pekarfelder durch expansionsabhängige Funktionen. In Appendix A werden diese und alle folgenden Gleichungen mit dieser Skalierung und zusätzlich in dimensionsloser Form angegeben.

II.2. Eine spezielle Struktureigenschaft der Gleichungen

Es gab Versuche, die Grundgleichungen in eine Form zu bringen, die der Lösung bzw. der Interpretation zugänglicher ist als die Eulersche Form (13) (vgl. Peebles (1980), Press 1976). Mit Hilfe der Lagrangeschen Zeitableitung ist es möglich, die Gleichungen in eine Form zu bringen, welche die Einschränkung auf die in diesem Kapitel vorgestellte Lösungsklasse nahelegt und schließlich einen Zusammenhang zu Lösungen der linearen Theorie aufdeckt, der es ermöglicht, allgemeine Lösungen für eindimensionale Bewegungen (auch in gekrümmten Hintergrundmodellen sowie in Modellen mit nicht-verschwindender kosmologischer Konstante) aus Lösungen der linearen Theorie zu konstruieren. Außerdem rechtfertigt dieser Zusammenhang das "ad hoc-Verfahren" von Zel'dovich zur Extrapolation der linearen Theorie in das nichtlineare Regime, (vgl. II.6.).

Wir leiten zunächst eine Gleichung für die pekuliare Gravitationsfeldstärke $\vec{w}$ her und bezeichnen den Fall verschwindender Expansion des Hintergrunds ("Einstein-Modell"), vgl. (14), mit einem Stern.

Aus (13) folgt, daß es ein Vektorfeld $\vec{r}(\vec{q}, t)$ bzw. $\vec{r}^*(\vec{q}, t)$ gibt, so daß die pekuliare Feldstärke folgender Gleichung genügt:

$$\ddot{\vec{w}} + h_1(t)\dot{\vec{w}} + h_2(t)\vec{w} = a^{-4}(a^4\vec{R}_1) \quad (18)$$

$$\ddot{\vec{g}} - \Lambda\vec{g} = \vec{R}_1^* \quad (18^*)$$

mit:

$$h_1(t) := 6H \quad \rightarrow 0$$

$$h_2(t) := 2\dot{H} + 8H^2 - 4\pi G\rho_H \rightarrow -\Lambda$$

$$\vec{R}_1 := \left(\frac{\vec{u}}{a} \cdot \nabla_q \right) \vec{w} - \frac{\vec{u}}{a} \left(\nabla_q \cdot \vec{w} \right) + \frac{1}{a} \nabla_q \times \vec{r}$$

$$\vec{R}_1^* := (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{g} - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{g}) + \nabla \times \vec{r}^*.$$

Wir erhalten Gleichung (18) durch Einsetzen von (13d) in (13b) mit Hilfe der Lagrangeschen Zeitableitung (2b), die invariant ist unter der Transformation ((11), (12)):

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_u = \partial_t|_q + \frac{\vec{u}}{a} \cdot \nabla_q = \partial_t|_x + \vec{v} \cdot \nabla = \left. \frac{d}{dt} \right|_v \quad (\text{vgl. (2b)}).$$

Wir erhalten zuerst: $\nabla_q \cdot (\vec{w}_t + \frac{\vec{u}}{a}(\nabla_q \cdot \vec{w}) + 2H\vec{w}) = \nabla_q \cdot (4\pi G\rho_H \vec{u})$.

Bei der Integration dieser Gleichung über den q-Raum erhalten wir ein Wirbelfeld $\nabla_q \times \vec{r}$, welches uns für die Belange dieser Arbeit nicht weiter interessiert; (dieser Term wird in II.4. kurz diskutiert):

$$\dot{\vec{w}} + 2H\vec{w} + \frac{\vec{u}}{a}(\nabla_q \cdot \vec{w}) - \left(\frac{\vec{u}}{a} \cdot \nabla_q\right)\vec{w} - \frac{1}{a}\nabla_q \times \vec{r} = 4\pi G\rho_H \vec{u}; \quad (18a)$$

(18a*) $\Leftrightarrow$ (18a).

Mit der Eulerschen Gleichung in der Form

$$\dot{\vec{u}} + H\vec{u} = \vec{w} \quad (18b)$$

$$\dot{\vec{v}} = \vec{g} \quad (18b^*)$$

erhalten wir (18). Beachte, daß $\dot{\vec{R}}_1 + 4H\vec{R}_1 = a^{-4}(a^4\vec{R}_1)'$ gilt mit dem in (18) definierten nichtlinearen Restglied $\vec{R}_1$. Die Gleichungen (18a,b) implizieren:

$$\ddot{\vec{u}} + 3H\dot{\vec{u}} + (\dot{H} + 2H^2 - 4\pi G\rho_H)\vec{u} = \vec{R}_1; \quad (18c)$$

$$\ddot{\vec{v}} - \Lambda\vec{v} = \vec{R}_1^*. \quad (18c^*)$$

Eine entsprechende Gleichung kann man für den Dichtekontrast herleiten:

$$(1 + \delta)\left(\frac{1}{1 + \delta}\right)'' + 2H(1 + \delta)\left(\frac{1}{1 + \delta}\right)' + 4\pi G\rho_H\delta = -\nabla_q \cdot \vec{R}_2 \quad (18d)$$

mit einem weiteren nichtlinearen Restglied $\vec{R}_2$:

$$\vec{R}_2 := \left(\frac{\vec{u}}{a} \cdot \nabla_q\right)\frac{\vec{u}}{a} - \frac{\vec{u}}{a}\left(\nabla_q \cdot \frac{\vec{u}}{a}\right) + \frac{1}{a}\nabla_q \times \vec{r};$$

$$\vec{R}_2^* := (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} - \vec{v}(\nabla \cdot \vec{v}) + \nabla \times \vec{r}^*.$$

Für die Dichte erhalten wir gemäß (12a):

$$\frac{\rho}{\rho_H}\left(\frac{\rho_H}{\rho}\right)'' + 2H\frac{\rho}{\rho_H}\left(\frac{\rho_H}{\rho}\right)' + 4\pi G(\rho - \rho_H) = -\nabla_q \cdot \vec{R}_2 \quad (18e)$$

$$\rho\left(\frac{1}{\rho}\right)'' + 4\pi G\rho - \Lambda = -\nabla \cdot \vec{R}_2^*. \quad (18e^*)$$

Man verwende die Formeln:

$$\frac{\dot{\delta}}{1+\delta} = \frac{\dot{\rho}}{\rho} - \frac{\dot{\rho}_H}{\rho_H}; \quad \frac{\dot{\rho}_H}{\rho_H} = -3H; \quad \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)' - \left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)^2 = -\rho\left(\frac{1}{\rho}\right)''.$$

Anmerkung:

Um die Gleichungen für die Dichte herzuleiten ist es bequem, von der Kontinuitätsgleichung auszugehen. Betrachte z.B. den Grenzfall (*):

Aus (1b) folgt: $\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right) = -\nabla \cdot \vec{v}_t - (\vec{v} \cdot \nabla)(\nabla \cdot \vec{v})$; aus (1d) folgt: $\nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot \vec{v}_t + \nabla \cdot [(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}] = \Lambda - 4\pi G\rho$. Mit Hilfe der Identität $\nabla \cdot [(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}] - (\vec{v} \cdot \nabla)(\nabla \cdot \vec{v}) = (\nabla \cdot \vec{v})^2 + \nabla \cdot \vec{R}_2^*$ erhalten wir (18e*).

Die Gleichungen (18) bestehen aus einem "Zeitentwicklungsanteil", der Lagrangesche Zeitableitungen entlang der Flüssigkeitspfade enthält und einem Teil, der nur (Eulersche) räumliche Ableitungen enthält.

Wir diskutieren im folgenden eine Lösungsklasse, für die wir das Verschwinden dieses Terms fordern. Die Divergenzen der Restglieder $\vec{R}_1$ und $\vec{R}_2$ lassen sich durch Invarianten als Funktion von Lagrange-Koordinaten ausdrücken, welche sich für die im folgenden zu diskutierende Lösung auf Linearkombinationen von Termen, die nur von Anfangsbedingungen abhängen, reduzieren, (vgl. den letzten Teil des Appendix C).

II.3. Ein Lösungsansatz für die nichtlineare Entwicklung von Geschwindigkeits- und Dichtestörungen in Friedmann-Modellen

Wir betrachten die Gleichung (18). Wie bereits angesprochen, verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung ohne Einschränkungen e.g. für quasi-eindimensionale Flüsse; ("quasi" bedeutet hier: Eindimensionale inhomogene Deformation auf einem dreidimensionalen homogenen Hintergrund). In diesem Fall reduziert sich (18) auf:

$$\ddot{w}_1 + h_1(t)\dot{w}_1 + h_2(t)w_1 = 0; \quad w_1 = w_1(X_1, t), \quad (19a)$$

$$\ddot{g}_1 - \Lambda g_1 = 0; \quad g_1 = g_1(X_1, t). \quad (19a^*)$$

Löst man (18a) für w_1 , so erhält man die allgemeine Lösung des quasi-eindimensionalen Problems für eine bestimmte Hintergrundlösung. Die Lösung im Grenzfall (18a*) für $\Lambda = 0$ wurde von Novikov angegeben (Novikov, E. 1969, vgl. auch Buchert, Götz 1987 und Appendix B). Novikov erhält die Lösung über eine Gleichung für die Dichte in einer Dimension, welche ein Spezialfall von (18e*) für $\vec{R}_2^* = 0$, $\Lambda = 0$ ist. Für den Fall eines flachen Hintergrunds wurde die allgemeine Lösung für die Entwicklung eindimensionaler Inhomogenitäten von Zentsova & Chernin (1980) angegeben. Die Autoren scheitern aber an der Lösung für gekrümmte Hintergründe. Sie geben für den Fall ($K > 0; \Lambda = 0$) Interpolationsformeln an, die das asymptotische Verhalten für kleine und große Zeiten richtig reproduzieren. Durch eine Beziehung der Gleichungen (18) zu den Gleichungen der linearisierten Theorie wird es möglich, die Lösungen für die Fälle ($K \neq 0; \Lambda = 0$) und auch für alle Modelle mit nicht-verschwindender kosmologischer Konstante, von denen die Lösungen der linearen Theorie bekannt sind, zu konstruieren (vgl. II.4., II.5., Appendix A).

Wir konzentrieren uns aber zunächst auf eine durch die spezielle Form der Gleichungen (18) nahegelegte dreidimensionale Verallgemeinerung des quasi-eindimensionalen Problems, um damit einen Lösungsansatz für das dreidimensionale Problem zu bestimmen.

Wir betrachten allgemeine Lösungen der Gleichungen:

$$\ddot{\vec{w}} + h_1(t)\dot{\vec{w}} + h_2(t)\vec{w} = 0; \quad \vec{w} = \vec{w}(\vec{X}, t), \quad (19b)$$

$$\ddot{\vec{g}} - \Lambda \vec{g} = 0; \quad \vec{g} = \vec{g}(\vec{X}, t). \quad (19b^*)$$

Setzt man zunächst in (19b*) $\Lambda = 0$, (betrachtet man also einen statischen und leeren Hintergrund), so erhält man wegen (18c*) (bis auf einen räumlich konstanten Vektor):

$$\dot{\vec{g}} = 0. \quad (20a)$$

Die allgemeine Lösung in Lagrangescher Form ist in diesem Fall gegeben durch:

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \vec{f}(\vec{X}, t) = \vec{f}(\vec{X}, t_0) =: \vec{G}(\vec{X}) \\ \Rightarrow \vec{x} &= \vec{f}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \vec{V}(\vec{X})(t - t_0) + \vec{G}(\vec{X}) \frac{(t - t_0)^2}{2}; \quad (\dot{\vec{f}}(\vec{X}, t_0) =: \vec{V}(\vec{X})), \end{aligned} \quad (20b)$$

d.h., die Flüssigkeits-“teilchen” führen eine gleichförmig beschleunigte Bewegung längs der Integralkurven aus. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft streng eindimensionaler Bewegungen in dem betrachteten Fall: Die Gravitationsfeldstärke ist für alle “Teilchen” stets konstant, da längs einer Geraden die (in der Newtonschen Theorie simultan) ausgeübten Kräfte durch die umgebenden “Teilchen” bis zum Durchdringen von Teilchen (singuläres Verhalten) stets gleichbleiben.

Auch in drei Dimensionen sind gleichförmig beschleunigte Bewegungen im Rahmen der Newtonschen Theorie möglich; diese werden in Buchert, Götz 1987 (vgl. Appendix B dieser Arbeit) ausführlich diskutiert.

In entsprechender Weise wollen wir allgemeine Lösungen von (19b) als Ansatz für das vorliegende Problem wählen. Ein entscheidender Vorteil der Gleichung (19b) sowie auch der Gleichung (18c) für $\vec{R}_1 = 0$ an $\vec{u}$ ist die Reduktion des eingeschränkten nichtlinearen Problems partieller Differentialgleichungen im “Eulerschen Raum” auf die Lösung *linearer gewöhnlicher* Differentialgleichungen im “Lagrangeschen Raum”.

Die Linearität von (18c) für $\vec{R}_1 = 0$ gestattet die Angabe eines allgemeinen Integrals in der Form:

$$\vec{F}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \vec{\alpha}(\vec{X})g^\alpha(t) + \vec{\beta}(\vec{X})g^\beta(t). \quad (21)$$

Man erhält es durch Lösung der Gleichung:

$$\vec{\ddot{F}} + 2H\vec{\dot{F}} - 4\pi G\rho_H(\vec{F} - \vec{\overset{0}{F}} + \vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 0. \quad (21a)$$

(Man zeigt durch Differentiation, daß (21a) ein Integral der Gleichung dritter Ordnung an $\vec{F}$ ist:

$$\vec{\ddot{\ddot{F}}} + 5H\vec{\ddot{F}} + (2\dot{H} + 6H^2 - 4\pi G\rho_H)\vec{\dot{F}} = 0;$$

diese folgt aus (18c, $\vec{R}_1 = 0$) unter Berücksichtigung der Definition der Integralkurven $\vec{F}$ (15a)).

Die Vektorfunktionen $\vec{\alpha}(\vec{X})$ und $\vec{\beta}(\vec{X})$ sind Funktionen von Lagrange-Koordinaten; sie lassen sich durch Linearkombinationen der Störfelder $\vec{U}(\vec{X})$ und $\vec{W}(\vec{X})$ zur Anfangszeit ausdrücken, (vgl. II.5.).

Falls die Lagrangeschen “Markierungen” durch $\vec{F}(\vec{X}) =: \vec{X}$ definiert sind (wie in der vorliegenden Arbeit der Fall, vgl. (15a)), dann genügen die von der Wahl der Hintergrundlösung abhängigen Moden $g(t) = g^\alpha, g^\beta$ wegen (21a) der folgenden Gleichung:

$$g_{tt} + 2Hg_t - 4\pi G\rho_H(g + 1) = 0; \quad g(t_0) := 0. \quad (21b)$$

Der Störterm $\vec{P}(\vec{X}, t_0) := \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ wurde in die Moden absorbiert.

Die Einschränkung der oben hergeleiteten Integralkurven (21) auf eine räumliche Dimension ergibt, nach Konstruktion, die allgemeine Lösung für eindimensionale Pekuliarbewegungen auf einem isotrop expandierenden Hintergrund. Um die Lösung explizit zu bestimmen, muß die gewöhnliche Differentialgleichung (21b) für eine gewählte Hintergrundlösung integriert werden, (dies wird in Appendix A für die drei Fälle ($K = 0, K \neq 0; \Lambda = 0$) getan).

Im folgenden wird nun gezeigt, daß diese Lösungen sogar den Moden der linearisierten Theorie (bis auf eine Integrationskonstante) entsprechen, was die Extrapolationsmethode von Zel’dovich, erläutert in I.1., nachträglich rechtfertigt und verifiziert.

II.4. Extrapolationsalgorithmus und -Theorem:

Der in diesem Abschnitt vorgestellte *Extrapolationsalgorithmus* zeigt, wie man aus Lösungen der linearen Theorie für die Entwicklung von Geschwindigkeits- und Dichtestörungen in Staubmedien Lösungen der allgemeinen Gleichungen konstruieren kann, die dem in II.3 hergeleiteten Ansatz entsprechen. Diese Methode der Extrapolation der Entwicklung linearisierter Störungen in das "nichtlineare Regime" besteht aus Konstruktionsschritten, die dem sog. "Zel'dovich-Formalismus" entsprechen (vgl. II.6.); letzterer wird durch diesen Algorithmus verallgemeinert in dem Sinn, daß *allgemeine* Lösungen der linearen Theorie extrapoliert werden, um Lösungen in der Form (21) zu erhalten. Man sollte dabei beachten, daß die Bestätigung eines "ad hoc-Ansatzes" nur aufgrund einer nicht-trivialen Eigenschaft der Gleichungen, die im folgenden dargestellt wird, möglich war. Die Integration der (nichtlinearen) Gleichungen hätte auch auf eine völlig andere Form der Lösung führen können. Im folgenden wird gezeigt, wie sich der oben erwähnte Algorithmus in natürlicher Weise aus dem Vergleich der linearisierten Gleichungen mit den Gleichungen (18) (hergeleitet in II.2.) ergibt:

Betrachten wir das linearisierte System, welches wir aus dem System (13) durch Vernachlässigung aller Terme, die quadratisch in den Störungen δ und $\vec{u}$ sind, erhalten:

$$\vec{u}_t^L|_q + H\vec{u}^L = \vec{w}^L \quad (13a)^L$$

$$\delta_t^L|_q + \frac{1}{a}\nabla_q \cdot \vec{u}^L = 0 \quad (13b)^L$$

(13c, d, e, f)^L bleiben in der Form unverändert.

Aus diesem die *lineare Theorie* konstituierenden System können wir die folgenden Gleichungen für Pekuliarfeldstärke, Pekuliargeschwindigkeit und Dichtekontrast ableiten (man kann diese aber auch einfach durch Linearisierung der Gleichungen (18) erhalten):

$$\vec{w}_{tt}^L + 6H\vec{w}_t^L + (2\dot{H} + 8H^2 - 4\pi G\rho_H)\vec{w}^L = \frac{1}{a^4} \left[a^4 \left(\frac{1}{a}\nabla_q \times \vec{r}^L \right) \right] \quad (22a)$$

$$\vec{u}_{tt}^L + 3H\vec{u}_t^L + (\dot{H} + 2H^2 - 4\pi G\rho_H)\vec{u}^L = \frac{1}{a}\nabla_q \times \vec{r}^L \quad (22b)$$

$$\delta_{tt}^L + 2H\delta_t^L - 4\pi G\rho_H\delta^L = 0. \quad (22c)$$

Vergleichen wir diese nun mit den Gleichungen (18) für die gewählte Einschränkung (Verschwinden der Terme $\vec{R}_1$ und $\vec{R}_2$):

$$\vec{\omega} + 6H\dot{\vec{\omega}} + (2\dot{H} + 8H^2 - 4\pi G\rho_H)\vec{\omega} = 0 \quad (23a)$$

$$\vec{u} + 3H\dot{\vec{u}} + (\dot{H} + 2H^2 - 4\pi G\rho_H)\vec{u} = 0 \quad (23b)$$

$$\left(\frac{1}{1+\delta}\right)'' + 2H\left(\frac{1}{1+\delta}\right)' - 4\pi G\rho_H\left(\frac{1}{1+\delta} - 1\right) = 0. \quad (23c)$$

In diesen Gleichungen sind Nichtlinearitäten enthalten über die Lagrangesche Zeitableitung (konvektive Terme $(\frac{\vec{u}}{a} \cdot \nabla_q)(\vec{\omega}, \vec{u}, \delta)$) und, in der Gleichung für den Dichtekontrast (23c), auch über Nichtlinearitäten in der abhängigen Variablen. Der Vergleich zeigt, daß die Pekuliarfeldstärke und die Pekuliargeschwindigkeit sowohl im linearisierten Fall, als auch im eingeschränkten nichtlinearen Fall identische gewöhnliche Differentialgleichungen erfüllen, wenn man das Wirbelfeld $\nabla_q \times \vec{\tau}^L$ als Nullvektor annimmt. (Man muß dabei beachten, daß die Felder der Gleichungen (23) als Funktionen von Lagrange-Koordinaten aufzufassen sind!). Die oben angedeutete *nichttriviale Eigenschaft* der Gleichungen besteht darin, daß man i.A. nicht erwarten kann, eine *lineare* Gleichung für $\vec{u}$ auf dem "Lagrange-Raum" zu erhalten, die letztlich die einfache Form der Integralkurven (21) bestimmt.

Die gemachte Einschränkung durch Spezialisierung der nichtlinearen Terme $\vec{R}_1$ und $\vec{R}_2$ (vgl. (18)) (nur in diesem Fall ist die Gleichung an $\vec{u}$ auf dem Lagrange-Raum linear!) ist sinnvoll, da sie (wegen der Vernachlässigung von Termen mit nur räumlichen Ableitungen) auch *Lösungen* des dreidimensionalen Problems liefert.

Bevor wir diese Behauptung verifizieren, müssen wir noch das in den linearisierten Gleichungen (22) auftretende Wirbelfeld $\nabla_q \times \vec{\tau}^L$ näher studieren:

I.A. steht dieses Wirbelfeld mit der Impulsdichte $\vec{j} := \rho\vec{u}$ ($\vec{j}^* = \rho\vec{v}$) in Verbindung:

$$4\pi G(\nabla_q \times \vec{j}) = -\frac{1}{a}\nabla_q \times (\nabla_q \times \vec{\tau}), \quad (24)$$

d.h., $\vec{\tau}$ ist das Vektorpotential der Impulsdichte:

$$4\pi G\vec{j} = -\frac{1}{a}\nabla_q(\phi_t + H\phi) - \frac{1}{a}\nabla_q \times \vec{\tau}; \quad (24a)$$

$$4\pi G\vec{j}^* = -\nabla\Phi_t - \nabla \times \vec{\tau}^*. \quad (24a^*)$$

(Man verwende die Gleichungen (13c,d) und (18a) um (24a) zu erhalten).

In der linearen Theorie kann man $\vec{\tau}^L$ mit Rotationsstörungen assoziieren:

$$4\pi G(\nabla_q \times \vec{j}^L) = 4\pi G\rho_H(\nabla_q \times \vec{u}^L) = -\frac{1}{a}\nabla_q \times (\nabla_q \times \vec{\tau}^L). \quad (24)^L$$

Daher impliziert die Unterdrückung des Wirbelfeldes $\nabla_q \times \vec{\tau}^L$ in (22), daß wir nur den rotationsfreien Anteil der Geschwindigkeitsstörungen betrachten. (Es wird sich zeigen, daß die Lösungen der nichtlinearen Gleichungen, die in Appendix C bestimmt werden, die Eigenschaft der Wirbelfreiheit behalten).

Wir formulieren nun die gewonnen Resultate in der Form eines Theorems. Der Beweis dieses Theorems wird zeigen, daß der vorgestellte Extrapolationsalgorithmus auch Lösungen der allgemeinen Gleichungen erzeugt.

THEOREM

Voraussetzung: Gegeben sei eine spezielle Lösung * des Systems (13)^L in der Form $\vec{w}^L = \vec{w}^L(\vec{q}, t)$, $\vec{u}^L = \vec{u}^L(\vec{q}, t)$, $\delta^L = \delta^L(\vec{q}, t)$.

Wir erhalten eine *Klasse von Lösungen* des Systems (17) durch die folgende Prozedur:

- (1) Ersetzung der Eulerschen Koordinaten $\{q_i\}$ in der Lösung $\vec{u}^L$ durch Lagrangesche Koordinaten $\{X_i\}$: $\vec{u}^L(\vec{q}, t) \rightarrow \vec{u}^L(\vec{X}, t) =: \vec{u}$.
- (2) Bestimmung der Integralkurven $\vec{F}$ des Feldes $\frac{\vec{u}}{a}$ aus (1) über die Definition (15a).
- (3) $\vec{F}(\vec{X}, t)$ ist eine *Lösung* des Systems (17) falls die Anfangsbedingungen $\vec{U}(\vec{X})$ und $\vec{W}(\vec{X})$ gemäß (C5), hergeleitet in Appendix C, vorgegeben werden.

Der Beweis des Theorems ergibt sich einmal aus dem Vergleich von (22) und (23), zum anderen durch Einsetzen des Ansatzes $\vec{F}$ in das System der Gleichungen (17), vgl. Appendix C.

* Der Übersichtlichkeit halber werden die Lösungen mit denselben Buchstaben, die bereits für die Felder eingeführt wurden, abgekürzt. "Speziell" bezieht sich hier auf eine gewählte Hintergrundlösung, die durch die Wahl von K und Λ bestimmt ist.

Anmerkung:

Die Schritte (1) und (2) des Theorems führen auf den Lösungsansatz (21), der Schritt (3) bestimmt das Erzeugendensystem der Lösung.

Die Ersetzung (Schritt (1)) ist nicht auf die Gleichung (22c) anwendbar. Die Dichte muß aus den Integralkurven $\vec{F}$ über das Integral der Kontinuitätsgleichung (15b) berechnet werden (vgl. (22c) mit (23c)). (Man kann zeigen, daß diese Ersetzungsvorschrift nur zu einer Lösung der Kontinuitätsgleichung führen würde, wenn die Lagrangesche Ableitung mit dem Eulerschen Gradient ∇_q kommutieren würde, was nicht der Fall ist).

II.5. Zusammenfassung und geschlossene Darstellung der Lösung in den Fällen ($K = 0, K > 0, K < 0; \Lambda = 0$):

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Lösungsklasse besteht aus Lösungen des Systems (17), die durch eine im Abschnitt II.3. diskutierte Einschränkung der Nichtlinearitäten bestimmt sind. Die Lösungen unterscheiden sich durch die Art des gewählten Hintergrunds; diese Wahl wurde eingeschränkt auf isotrop expandierende Modelle. Es wurde gezeigt, daß die Form des Lösungsansatzes (21) sowohl aus der dreidimensionalen Verallgemeinerung der allgemeinen Lösung des quasi-eindimensionalen Problems (eindimensionale Inhomogenitäten auf dreidimensionalen Hintergründen), als auch aus Lösungen der linearen Theorie konstruiert werden kann (II.3., II.4.). In Appendix A wird der Ansatz (21) durch Integration der eingeschränkten Gleichungen explizit für die Fälle ($K = 0, K > 0, K < 0; \Lambda = 0$) bestimmt; (dort werden auch alle relevanten Gleichungen dieses Kapitels in dimensionsloser und skalierten Form angegeben, eine Form, die vor allem bei numerischen Simulationsrechnungen verwendet wird). Nachdem das Erzeugendensystem der Lösungsklasse in Appendix C bestimmt wurde, kann nun die Lösung für die in Appendix A integrierten Fälle explizit angegeben werden. Wir drücken die Lösung (hier in dimensionaler, unskalierten Form) durch *Pekuliar-Potentialstörungen* der Geschwindigkeit und der Beschleunigung aus, da die Lösungsklasse nur wirbelfreie Strömungen enthält. Außerdem wird als Zeitvariable die "Rotverschiebung" Z verwendet, was einen unmittelbaren Vergleich mit Beobachtungsdaten erlaubt (für Details vgl. Appendix A):

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{X}, Z) &= \vec{X} + g^\alpha(Z)\vec{\alpha}(\vec{X}) + g^\beta(Z)\vec{\beta}(\vec{X}); \quad \vec{F}(\vec{X}, Z_0) = \vec{X}; \\ \rho(\vec{X}, Z) &= \rho_H(Z) \frac{1 + \delta(\vec{X})}{\|F_{i,k}(\vec{X}, Z)\|}; \quad \rho(\vec{X}, Z_0) = \rho_{H_0}(1 + \delta(\vec{X})),\end{aligned}\tag{25a}$$

mit:

$$\begin{aligned}\rho_H(Z) &:= \rho_{H_0} \frac{(1 + Z)^3}{(1 + Z_0)^3}, \\ \rho_{H_0} &= \rho_H(Z_0) = \frac{3}{8\pi G} (\Omega|_{Z=0})(H^2|_{Z=0}) \cdot (1 + Z_0)^3 \\ \delta(\vec{X}) &= \frac{-1}{4\pi G \rho_{H_0}} \nabla_X \cdot \vec{W} = -\nabla_X \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}).\end{aligned}\tag{25b}$$

Die Vektorfunktionen $\vec{\alpha}(\vec{X})$ und $\vec{\beta}(\vec{X})$ sind Linearkombinationen der Pekuliar-Felder $\vec{U}(\vec{X})$ und $\vec{W}(\vec{X})$. Zusammen mit den Moden g^α und g^β (als Lösungen von (21b)) werden diese nun für die Fälle eines flachen und eines “gekrümmten” Hintergrunds angegeben:

- Der Fall ($K = 0; \Lambda = 0$) ; $\left(t_0 = \frac{2}{3H_0} = \frac{2(1+Z_0)^{-3/2}}{3H|_{Z=0}}\right)$:

$$g^\alpha(Z) = \frac{1+Z_0}{1+Z} - 1 = a(Z) - a(Z_0),$$

$$g^\beta(Z) = \left(\frac{1+Z_0}{1+Z}\right)^{-3/2} - 1 = a^{-3/2}(Z) - a^{-3/2}(Z_0),$$

(25c)

$$\vec{\alpha}(\vec{X}) = +\frac{3}{5}\vec{U}(\vec{X})t_0 + \frac{9}{10}\vec{W}(\vec{X})t_0^2,$$

$$\vec{\beta}(\vec{X}) = -\frac{3}{5}\vec{U}(\vec{X})t_0 + \frac{3}{5}\vec{W}(\vec{X})t_0^2.$$

- Der Fall ($K \neq 0; \Lambda = 0$) ; $\left(b_0 := g(Z_0) + 1, \quad \gamma = \frac{K \cdot \Omega|_{Z=0}}{\Omega|_{Z=0}-1}, \quad t_0 = \frac{2(1+Z_0)^{-2}}{H|_{Z=0}\sqrt{\gamma\Omega|_{Z=0}}}\right)$:

$$g^\alpha(Z) = \frac{1}{b_0^\alpha} \left[-\sqrt{\gamma(1+Z)-K} \quad \gamma(1+Z)m_k(Z) - \gamma(1+Z) + \frac{K}{3} \right] - 1,$$

$$g^\beta(Z) = \frac{1}{b_0^\beta} \left[-\sqrt{\gamma(1+Z)-K} \quad \gamma(1+Z) \right] - 1,$$

$$\vec{\alpha}(\vec{X}) = b_0^\alpha \gamma(1+Z_0) \left[-\frac{3}{2}\sqrt{\gamma(1+Z_0)-K} \vec{U}t_0 - \frac{1}{4}(3\gamma(1+Z_0)-2K)\vec{W}t_0^2 \right], \quad (25d)$$

$$\vec{\beta}(\vec{X}) = \frac{1}{b_0} \gamma(1+Z_0) \vec{W}t_0^2 - \vec{\alpha}(\vec{X}) = b_0^\beta \gamma(1+Z_0) \cdot \left[\text{siehe (A11d), (A12)} \right],$$

$$m_k(Z) = \begin{cases} \text{Arcth}(-\sqrt{\gamma(1+Z)+1}) & (\text{für } K = -1) \\ \text{arcctg}(-\sqrt{\gamma(1+Z)-1}) - \pi & (\text{für } K = +1). \end{cases}$$

Die Gleichungen (25) stellen *Lösungen* dar, falls folgendes gilt:

Die Pekuliarfelder $\vec{U}(\vec{X})$ und $\vec{W}(\vec{X})$ sind über (C7) durch die Potentialstörungsfelder $\hat{s}(\vec{X})$ und $\hat{\phi}(\vec{X})$ bestimmt (Beachte $\vec{U} = \nabla_X \hat{s}, \vec{W} = -\nabla_X \hat{\phi}$). Die Determinante $\|F_{i,k}\|$ reduziert sich unter Berücksichtigung der Zwangsbedingungen (C7) auf:

$$\|F_{i,k}\| = 1 + g^\alpha(Z) (\nabla_X \cdot \vec{\alpha}) + g^\beta(Z) (\nabla_X \cdot \vec{\beta}) , \quad (26a)$$

d.h., Invarianten höherer Ordnung der Tensoren $(\alpha_{i,k})$ und $(\beta_{i,k})$ fallen wegen funktionaler Abhängigkeiten von Geschwindigkeits- und Dichtestörungen, sowie aufgrund der Eigenschaft, daß die Flächen $(X_i, X_j, X_k = \text{const}, Z(X_i, X_j, X_k = \text{const}))$, (wobei Z für die beiden *Pekuliar*-Potentiale steht), abwickelbar sein müssen, fort. (Man beachte jedoch, daß die Gesamtpotentiale $\hat{\Phi}$ und $\hat{S}$ letztere Eigenschaft nicht besitzen).

Die Anfangsverteilung des Dichtekontrasts ist eingeschränkt auf:

$$\delta = \frac{\Delta_X \hat{\phi}}{4\pi G \rho_{H_0}} = -\frac{1}{4\pi G \rho_{H_0}} \frac{1 + \Gamma_1'^2 + \Gamma_4'^2}{\Gamma_1'' X_2 + \Gamma_4'' X_3 + C''} . \quad (26b)$$

Es sei betont, daß die Zwangsbedingungen für allgemeine quasi-eindimensionale Störungsfelder trivial sind. Die Ausdrücke (25) stellen in diesem Fall die allgemeine Lösung ohne Einschränkung dar. (für Details vgl. Appendix C).

Anmerkungen:

Integriert man die Lösung im Fall eines statischen Hintergrunds (Einstein-Modell für $a = 1$), Gl. (18c*) für $\vec{R}_1^* = 0$, so läßt sich das ursprüngliche Resultat von Jeans (vgl. Bonnor 1967) eines exponentiellen Wachstums der Störungen im "linearen Regime" (bei entsprechender Anpassung der kosmologischen Konstante Λ an den Wert der Hintergrunddichte, vgl. (14)) sogar in das "nichtlineare Regime" fortsetzen.

Die Extrapolationsmethode zur Gewinnung der Lösung (II.4.) ermöglicht auch die Konstruktion weiterer Lösungen, die nicht in diesem Abschnitt explizit angegeben wurden. Z.B. könnten Modelle konstruiert werden, welche die nichtlineare Entwicklung von Störungen in Friedmann-Lemaître-Kosmologien mit nichtverschwindender kosmologischer Konstanten beschreiben (durch Extrapolation der entsprechenden Lösung der linearen Theorie). Hat man Interesse an der Erweiterung des "PANCAKE-Bildes" für nicht-scherungsfreie Hintergründe, so ließe sich das Extrapolationsverfahren entsprechend verallgemeinern und damit auch die vorgestellte Lösungsklasse erweitern.

II.6. Einbettung des Ansatzes von Zel'dovich in die Lösungsklasse und strenge Begründung approximativer Anwendung durch Eigenschaften der Lösung

Eine wichtige Eigenschaft der in II.5. vorgestellten Lösungsklasse ist, daß sie die bislang gebräuchliche lineare Theorie wirbelfreier Störungen in Staubmedien vollständig *ersetzen* kann. Diese Eigenschaft ist wegen der Betrachtungen in II.4. evident (man vergleiche (22) und (23)). Linearisiert man die Lösung z.B. für die Dichte (25b), so erhalten wir zunächst *:

$$\begin{aligned}\rho &\xrightarrow{L} \rho^L(\vec{X}, Z) = \rho_H(Z)(1 + \delta^L(\vec{X}, Z)); \\ \delta^L(\vec{X}, Z) &= -b^\alpha(Z) \text{Spur}(\alpha_{i,k}(\vec{X})) - b^\beta(Z) \text{Spur}(\beta_{i,k}(\vec{X})).\end{aligned}\quad (27a)$$

Die Lösung $\delta^L(\vec{q}, Z)$ des linearisierten Systems (13)^L erhalten wir dann durch Ersetzung der Lagrangeschen Koordinaten in (27a) durch Eulersche, d.h., daß die Verrückungen der "Teilchen" im Vergleich zur Verrückung der Fundamentalbeobachter durch die Expansionsbewegung klein sein müssen :

$$|\vec{f} - \vec{f}_H| \ll 1 \Rightarrow \vec{q} = \frac{1}{a} \vec{f}(\vec{X}, Z) \approx \frac{1}{a} \vec{f}_H = \vec{X}. \quad (27b)$$

Dies impliziert, daß die Koordinaten nicht mehr, wie im "Lagrange-Bild", von der Lösung abhängen. Die Form der Lösung der auf dem Hintergrund linearisierten Gleichungen erhält man auch bei Berücksichtigung der Zwangsbedingungen, da diese nur Invarianten von höherer Ordnung in den Störfeldern aus dem nichtlinearen Ausdruck für die Dichte herausheben.

Die von Zel'dovich (1970a,b) vorgeschlagene *Approximation* wird durch einen Formalismus erzeugt (sog. "Zel'dovich-Formalismus"), der als Umkehrung des oben durchgeführten Linearisierungsprozesses verstanden werden kann und aus den ersten beiden Schritten des in II.4. verifizierten Algorithmus besteht. Zel'dovichs' Vorschlag ergibt sich aus der Forderung:

$$\dot{\vec{F}}^A = \frac{\vec{u}^L(\vec{X}, Z)}{a}, \quad \vec{f}^A = a \vec{F}^A \quad (\text{vgl. I.1.}), \quad (28)$$

* Die Funktionen $b = b^\alpha, b^\beta (b = g + 1)$ sind die beiden linear unabhängigen Moden der linearen Theorie.

wobei die zeitlich abnehmende Lösung von $\bar{u}^L$ nicht betrachtet wird (vgl. die Erläuterungen von Zel'dovich (1970a), sowie die Bemerkungen in Zel'dovich, Novikov (1983, §14.2).

Die *Approximation* besteht nun im wesentlichen darin, daß die Zwangsbedingungen vernachlässigt werden. Das hat zur Folge, daß in der Näherung für die Dichte die Invarianten höherer Ordnung der Tensoren $(\alpha_{i,k})$ und $(\beta_{i,k})$ enthalten sind (vgl. II.5.).

Die in diesem Sinn approximative Verwendung der Lösungskurven (25a), (die in II.7. noch genauer definiert wird), kann durch die Angabe von *Eigenschaften der Lösung* genauer begründet werden:

Man kann durch die bereits genannten Eigenschaften (die lineare Theorie wird ersetzt, die quasi-eindimensionale Entwicklung wird exakt beschrieben), die Approximation für kleine Störungen und für nahezu eben-symmetrische Bewegungen gutheißen, (vgl. dazu Fig.1e-h). Eine weitere kinematische Eigenschaft der Lösung ist, daß der Pekuliar-Geschwindigkeitsgradient nur *eine* nicht-verschwindende Eigenrichtung besitzt (vgl. die Diskussion dieser Eigenschaft im Rahmen der in Appendix B dargestellten Lösungsklasse, deren kinematische Eigenschaften sich auf den Pekuliar-Tensor $(u_{i,k})$ übertragen lassen). Das bedeutet anschaulich, daß die Bewegung des dreidimensionalen Mediums relativ zur Expansion des Hintergrunds *lokal* durch eindimensionale Kontraktionen bzw. Expansionen innerhalb eines Volumenelements erzeugt wird. Da die Eigenrichtungen des Geschwindigkeitsgradienten von Volumenelement zu Volumenelement variieren, ist die globale Bewegung verschieden von einer eben-symmetrischen Kontraktion, sie ist *maximal anisotrop*. Die Argumentation für die approximative Verwendung wird dadurch unterstützt, daß die Lösungen eine stark anisotrope Kontraktion, wie sie von anderen Autoren für den generischen Kollaps einer Staubwolke erwartet wird (vgl. I.1. und I.2.) *idealisieren*. Diese Eigenschaft der Lösung hat zur Folge, daß anfängliche Anisotropien durch die Entwicklung verstärkt werden. Dies kann man am besten mit Hilfe des Scherungsparameters σ , definiert durch $\sigma := \sqrt{\sigma_{i,j}\sigma_{j,k}}$ mit $\sigma_{i,j} = u_{i,j} - \frac{1}{3}\text{Tr}(u_{i,j})\delta_{ij}$, (das Komma notiert ausnahmsweise die Ableitung nach Eulerschen Koordinaten in dieser Zeile), ausdrücken; (man beachte, daß der Hubblefluß als wirbelfrei vorausgesetzt wurde). Für hinreichend große Zeiten ist, (vgl. die Lösung II.5.):

$$\sigma^2 = \frac{1}{4J^2}(u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,3}^2) \rightarrow \frac{a^2\dot{g}^{\alpha 2}}{4J^2}(\alpha_{1,1}^2 + \alpha_{2,2}^2 + \alpha_{3,3}^2).$$

Für $J \rightarrow 0$ wird σ beliebig groß, unabhängig von der speziellen Wahl der Anfangsbe-

dingungen. Diese Formel zeigt auch, daß eine anfänglich isotrope Verteilung ($\sigma(t = t_0) = 0$) für $t > t_0$ anisotrop wird.

Die oben genannten Eigenschaften unterstützen die approximative Verwendung und geben eine strenge Begründung ursprünglicher Motive der Approximation, sie können aber nicht *beweisen*, daß diese Beschreibung wirklich den generischen Fall widerspiegelt (dies wurde nur für homogene Medien gezeigt, vgl. die Literaturnachweise in I.2.). Für die Entwicklung inhomogener Medien gibt es jedoch plausible Argumente, warum eine solche Näherung zumindest qualitativ das allgemeine Verhalten demonstriert (man denke z.B. an die kinematischen Argumente, die in I.4. diskutiert wurden). Man sieht jedoch bereits an den durchgeführten Selbstkonsistenztests (vgl. I.2. und II.7. für die allgemeinere Form), daß die durch die Idealisierung vernachlässigten Abweichungen von der lokalen Eindimensionalität der Bewegung sogar schneller als die linearisierten Störungen anwachsen. Auf die Frage, was diese Abweichungen an der sich im "nichtlinearen Regime" entwickelnden Dichteverteilung ändern können, werden in III.1. mögliche Antworten diskutiert.

Es ist möglich, den im Sinn der Arbeit von Doroshkevich et al. (1973) "*selbstkonsistenten Teil*" von Zel'dovichs' Ansatz (vgl. I.2. und die Durchführung des Selbstkonsistenztests für den allgemeineren Ansatz in II.7.) als *Unterklasse* der diskutierten Lösungsklasse aufzufassen (*Einbettung* der "Zel'dovich-Approximation"), wenn man fordert, daß die Funktion $\vec{\beta}(\vec{X})$ verschwindet. Man beachte hierbei, daß nicht allein das Verschwinden der $\vec{\beta}$ -Mode der linearen Theorie b^β für große Zeiten dafür ausreicht. Vielmehr impliziert die Forderung $\vec{\beta} = 0$, daß $\vec{U} = \vec{W}t_0$ gilt, d.h. daß die anfänglichen Verteilungen von $\vec{U}$ und $\vec{W}$ identisch sind (die Störungen sind *maximal korreliert*, was der Vorgabe von nur einer Vektorfunktion im Rahmen der "Zel'dovich-Approximation" entspricht). Die möglichen Konsequenzen einer *separaten* Vorgabe von Geschwindigkeits- und Dichtestörungen werden in II.8. diskutiert.

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei noch eine formale Bemerkung angefügt:

In dieser Arbeit werden die Lagrangeschen "Markierungen" der Integralkurven so definiert, daß sie mit den Eulerschen Koordinaten im ungestörten Modell zur Zeit der Vorgabe von Anfangsdaten übereinstimmen, d.h. sie markieren Fundamentalbeobachter zur Zeit $t = t_0$, die z.B. auf der "Fläche der letzten Streuung der Strahlung an der Materie" sitzen, welche den Referenzzustand der hier und heute gemessenen Strahlungsverteilung erzeugt

(isotrope Hintergrundstrahlung). Diese Wahl der Lagrange-Koordinaten ist dadurch auch unabhängig von der Wahl der Anfangsbedingungen. Man kann jedoch die Integralkurven umbenennen und z.B. die neuen Koordinaten $\{Y_i\}$ so festlegen, daß sie "Teilchen" markieren, die eine anfängliche Verrückung relativ zu Fundamentalbeobachtern haben:

$$\vec{Y} := \vec{X} + \overset{\circ}{P}(\vec{X}); \overset{\circ}{P} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\frac{3}{2}t_0^2\vec{W}. \quad (30)$$

Die Form der Lösung ändert sich dann zu:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{Y}, Z) &= \vec{Y} + b^\alpha(Z)\vec{\alpha}(\vec{Y}) + b^\beta(Z)\vec{\beta}(\vec{Y}); \\ b^\alpha(Z_0) &= b^\beta(Z_0) = 1. \end{aligned} \quad (30a)$$

Jedoch muß die über die Koordinaten $\{Y_i\}$ ausgedrückte Dichte jetzt so geschrieben werden, daß $\rho(\vec{Y}, Z_0) = \rho_{H_0}(1 + \overset{\circ}{\delta})$ respektiert wird (vgl. die geforderte Abspaltung des Dichteexzesses in (12a) (vgl. (15b)):

$$\rho \left\| \frac{\partial F_i}{\partial Y_k} \right\| = const = \overset{\circ}{\rho} \left\| \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial Y_k} \right\|(\vec{Y}) \Rightarrow \rho(\vec{Y}, Z) = \rho_{H_0}(1 + \overset{\circ}{\delta}) \frac{\left\| \frac{\partial \vec{F}_i}{\partial Y_k} \right\|}{\left\| \frac{\partial F_i}{\partial Y_k} \right\|}. \quad (30b)$$

Die Form (30a) (für $b^\beta = 0$) wird von Mitgliedern der Zel'dovich-Gruppe verwendet. Ein Ausdruck für die Dichte der Form (vgl. (30b) und (E2)):

$$\rho^A = \frac{\rho_H}{\left\| 1 + b^\alpha(\alpha_{i,k}) + b^\beta(\beta_{i,k}) \right\|}; \quad b^\alpha(Z_0) = b^\beta(Z_0) = 1$$

impliziert jedoch nur formale Konsistenz mit (12a) *nach* der Linearisierung (vgl. die Konstruktion des Ansatzes von Zel'dovich, I.1.). Die Forderung (12a) gilt jedoch auch für die Lösung der nichtlinearen Gleichungen. Diese formale Inkonsistenz taucht in neueren Arbeiten nicht mehr auf, da der Ansatz durch Transformation des Zeitparameters aus der Abbildung (E10) eines kräftefreien Kontinuums gewonnen wird, mit der Forderung $\overset{\circ}{\rho} = \overset{\circ}{\rho}_H$, (vgl. Shandarin & Zel'dovich 1984, Shandarin & Zel'dovich 1988); d.h. aber auch, daß in dieser Version streng nur das Geschwindkeitsfeld als Störungsfeld betrachtet werden kann. Letzteres wird oft nicht beachtet. Man vermischt Formalismen der linearen Theorie mit Zel'dovichs' nichtlinearem Ansatz. Man macht dadurch jedoch keinen nennenswerten quantitativen Fehler, da $\overset{\circ}{\delta} \ll 1$ gilt.

II.7. Allgemeine eben-symmetrische Lösungen, verallgemeinerte approximative Theorie und das "Selbstkonsistenzkriterium"

Das "prototypische" Beispiel strenger Lösungen der vorgestellten Klasse wird von den Pekuliarpotentialen

$$\overset{\circ}{s} = \overset{\circ}{s}^p(k_1 X_1 + k_2 X_2 + k_3 X_3), \quad (31a)$$

$$\overset{\circ}{\phi} = \overset{\circ}{\phi}^p(k_4 X_1 + k_5 X_2 + k_6 X_3) \quad (31b)$$

erzeugt. Dabei sind $\overset{\circ}{s}^p$ und $\overset{\circ}{\phi}^p$ beliebige Funktionen und $k_1 \dots k_6$ Konstanten, die durch die folgenden Relationen eingeschränkt sind:

$$\frac{k_1}{k_4} = \frac{k_2}{k_5} = \frac{k_3}{k_6}. \quad (31c)$$

(Die Flächen $(X_i, X_j, \overset{\circ}{s}^p(k_i X_i, k_j X_j, k_k X_k = \text{const}))$ und $(X_i, X_j, \overset{\circ}{\phi}^p(k_i X_i, k_j X_j, k_k X_k = \text{const}))$; i, j, k paarweise verschieden, sind abwickelbar; die Relationen (19c) folgen aus der funktionalen Abhängigkeit der Störpotentiale (vgl. Appendix C)). Die Relationen (19c) implizieren, daß die Winkel, um die man die Ebenen $(X_i, X_j, X_k = \text{const})$ rotieren muß, um die Argumente der Potentiale ineinander überzuführen, identisch sein müssen:

$$\arctan\left(\frac{k_1}{k_4}\right) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_5}\right) = \arctan\left(\frac{k_3}{k_6}\right).$$

Damit ist die Gesamtkonfiguration eben-symmetrisch. Die Lösungen (25) zusammen mit (31) modellieren Materiekonzentrationen zu eben-symmetrischen PANCAKES, da die Symmetrie der Anfangsbedingung sich in diesem Fall für alle Zeiten in den "Eulerschen Raum" überträgt. Diese Beispiele sind "prototypisch", da sie global das modellieren, was lokal eine Eigenschaft aller Lösungen der Klasse ist, vgl. II.6. . Diese Lösungen zeigen auch Eigenschaften der Entwicklung von PANCAKES in dieser Klasse, wie sie lokal in jedem Volumenelement (mit Ausnahme der Orte, wo Singularitäten höherer Ordnung auftreten) stattfindet. Wie bereits in I.1.-3. erläutert, wird das Studium der eindimensionalen Bewegung sogar als repräsentativ für die allgemeine Entwicklung des Mediums angesehen. Die Lösungen (25,31) sind in diesem Sinn geeignet, (noch näher zu besprechende) allgemeinere Situationen der unabhängigen Vorgabe zweier Anfangsfelder zu modellieren, wie

sie bislang in der Literatur nicht betrachtet wurden (vgl. II.8.). In diesem Fall können die Lösungen (25,31) auch als Testlösungen für numerische Programme herangezogen werden.

Insbesondere gibt die Darstellung (25) eine direkte Möglichkeit, den Effekt räumlicher Krümmung des Hintergrunds zu berücksichtigen, was eine aktuelle Fragestellung bei der Diskussion des PANCAKE-Szenariums ist (vgl. z.B. Silk & Vittorio 1987). Andere Lösungen, die durch (C5) definiert werden, führen i.A. auf die Problematik, daß *spezielle* Lösungen des Euler-Poisson-Systems i.A. so eingeschränkt sind, daß ein für die kosmologische Fragestellung sinnvolles, auf einem endlichen Gebiet zumindest beschränktes Spektrum, im Rahmen der betrachteten Klasse nicht konstruierbar ist. (Z.B. sollte die Klasse im Fall von Staublösungen nur solche Einschränkungen der Poissongleichung erlauben, die noch $\Delta_0 \overset{\circ}{\phi} \propto \overset{\circ}{\phi}$ bzw. $\Delta_0 \overset{\circ}{s} \propto \overset{\circ}{s}$ gestatten, was schon einen sehr allgemeinen Fall darstellt, (vgl. dazu III.1.). Mathematisch konstruierbare Fälle führen z.B. für die Klasse (C5) auf an manchen Orten singuläre Dichteverteilungen bzw. auf Geschwindigkeitsfelder mit unendlicher Divergenz. Man kann prinzipiell Anfangsbedingungen konstruieren, die in einem gewissen Gebiet singularitätenfrei sind; gibt es jedoch Orte singulärer Dichte, so dominiert die Singularität für hinreichend große Zeiten die Entwicklung der Dichte auch in dem betrachteten Gebiet.

Um physikalische Situationen studieren zu können, muß man zu *Approximationen* übergehen. Die erzielten Resultate können in diesem Sinn zur Verbesserung von Approximationen beitragen. Natürlich sehe ich diese Möglichkeit nur in zweiter Linie. Die Resultate des Kapitels II sind grundlegend für die weitere Forschung im Hinblick auf *exakte* Szenarien, die meiner Meinung nach im Rahmen der gemachten Voraussetzungen konstruierbar sein müßten (vgl. auch III.1.).

Die approximative Verwendung der Lösungskurven (25a) stellt durch die Möglichkeit der *Einbettung* der "Zel'dovich-Approximation" (vgl. II.6.) eine *Verallgemeinerung* der Standardtheorie dar. Wir geben jetzt eine formal strenge Definition dieser Approximation im Rahmen der Newtonschen Gravitationstheorie an :

Definition (Approximative Theorie):

Gegeben sei die *Lösung* (25) mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Lösung modelliert die nichtlineare Entwicklung von Störungen $\vec{p} = \nabla_X \psi$ eines dreidimensionalen isotropen Hintergrundmodells ($\vec{f} = \vec{f}_H + \vec{p}$).

2. Die Lösung enthält allgemeine eben-symmetrische Lösungen als Unterklasse.
3. Die Lösung geht durch Linearisierung über in die lineare Theorie der Entwicklung skalarer Störungen des Friedmann-Hintergrunds.
4. Die inhomogene Deformation $\vec{p}$ bleibt stets lokal eindimensional, d.h. der Expansionsensor $(\partial u_i / \partial q_j)$ besitzt nur einen nichtverschwindenden Eigenwert.

Die *Approximation* wird dann durch folgende Vereinbarungen definiert:

1. Die Lösungskurven (25a) beschreiben die Entwicklung sämtlicher Anfangsbedingungen, d.h., die Einschränkungen (C5), (vgl. Appendix C) werden ignoriert. Das bedeutet insbesondere, daß der approximative Ausdruck für die Dichte auch Invarianten höherer Ordnung in den Störungsfeldern enthält.
2. Die Lösungskurven werden auch in Gebiete extrapoliert, die durch Vielstromsysteme charakterisiert sind, d.h., Mehrdeutigkeiten des Geschwindigkeitsfeldes nach dem Kreuzen von Trajektorien werden verschiedenen Strömen zugeordnet, obwohl die durch (25a) definierte Transformation in den "Eulerschen Raum" singular ist. Damit diese Approximation zumindest kurz nach dem Auftreten von Singularitäten realistische Dichteverteilungen liefert, treffen wir die Vereinbarung, daß Ströme addiert werden, d.h. Zweige der Dichteverteilung summieren sich zur Gesamtdichte.

Diese Definition gibt zum ersten Mal einen formal geschlossenen Rahmen für ein gedanklich geschlossenes Szenarium. Der zweite Punkt der approximativen Anwendung ist wesentlich für die räumliche Auflösung der Singularitätenstruktur (Dieser Punkt wurde im Rahmen der "Zel'dovich-Approximation" nur im eindimensionalen Fall genauer berücksichtigt (vgl. z.B. Shukurov 1981). In höheren Dimensionen wurde diese Betrachtung durch numerische Simulationen ersetzt; wegen der Mehrdeutigkeit der Felder entsteht eine Komplikation des Plotprogramms, die in den Untersuchungen des Abschnitts II.8. berücksichtigt wurde).

Man beachte auch, daß der genannte zweite Punkt im Rahmen des kräftefreien Kontinuums oder der geometrisch-optischen Analogie (vgl. I.4.) weniger einschränkend ist als in selbstgravitierenden Medien: Dieser Punkt impliziert nämlich, daß die (gravitative) Wechselwirkung der Ströme des Vielstromsystems vernachlässigt wird. Im eindimensionalen Fall wurde numerisch gezeigt, daß diese Wechselwirkung zu einer Erhöhung der Anzahl der Ströme führt, die einer Bifurkationskaskade ähnelt, wie sie in "Feigenbaum"-Szenarien

studiert wird (vgl. Doroshkevich et al. 1980a, Fig.4k) (vgl. "Ausblick auf weiterführende Arbeiten").

Wir wollen zum Abschluß dieses Abschnitts ein Kriterium in Erinnerung rufen, das im Rahmen der "Zel'dovich-Approximation" als Test für die Gültigkeit der approximativen Anwendung herangezogen wurde (vgl. I.2.). Es ist ein *Selbstkonsistenztest* bezügl. des Dichtewachstums. Wir wollen diesen Test für den allgemeineren Lösungsansatz des Kapitels II für $\Lambda = 0$ durchführen. Ich möchte im Zusammenhang mit diesem oft als Argument benutzten Kriterium hervorheben, daß man annimmt, es handle sich um Lösungen, wenn ein Ansatz in diesem Sinn "selbstkonsistent" ist ($\epsilon = 0$, vgl. I.2.). Wir werden jedoch in III.1. sehen, daß "selbstkonsistente" Ansätze konstruierbar sind, die nicht Lösungen des Euler-Poisson-Systems sind. Der Grund dafür ist, daß das "Selbstkonsistenzkriterium" nur die Quellgleichung des Gravitationsfeldes $\rho = -\frac{1}{4\pi G} \nabla \cdot \vec{g}$ berücksichtigt, nicht aber die Integrabilitätsbedingung $\nabla \times \vec{g} = 0$; die Implikation "selbstkonsistent" $\Rightarrow$ "ist Lösung" gilt aus demselben Grund nur im eindimensionalen Fall.

Wir definieren entsprechend (E6) ein Fehlermaß durch:

$$\epsilon := \frac{\hat{\rho} - \rho}{\rho} = \epsilon(\vec{X}, t), \quad (32)$$

wobei ρ durch den Ausdruck (25b) unter Vernachlässigung der Zwangsbedingungen gegeben ist und $\hat{\rho}$ durch die oben zitierte Quellgleichung ($\Lambda = 0$) für den Ansatz (25a). Es ist klar, daß der Fehler wie in (E7) wiederum durch Invarianten der Tensoren der zweiten Ableitungen der Störungspotentiale gegeben ist ($D^\alpha := ag^\alpha, D^\beta := ag^\beta$):

$$\begin{aligned} -4\pi G\rho_{H_0}(1 + \overset{\circ}{\delta})(1 + \epsilon) = & 3\bar{a}a + a^2(\bar{D}^\alpha + 2\frac{\bar{a}}{a}D^\alpha)I(\alpha) + a^2(\bar{D}^\beta + 2\frac{\bar{a}}{a}D^\beta)I(\beta) \\ & + aD^\alpha(2\bar{D}^\alpha + \frac{\bar{a}}{a}D^\alpha)II(\alpha) + aD^\beta(2\bar{D}^\beta + \frac{\bar{a}}{a}D^\beta)II(\beta) \\ & + a(2\bar{D}^\alpha D^\beta + 2\bar{D}^\beta D^\alpha + 2\frac{\bar{a}}{a}D^\alpha D^\beta)\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\alpha_i, \beta_j, X_k) \\ & + (3\bar{D}^\alpha D^\alpha D^\alpha)III(\alpha) + (3\bar{D}^\beta D^\beta D^\beta)III(\beta) \\ & + D^\alpha(2\bar{D}^\alpha D^\beta + \bar{D}^\beta D^\alpha)\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\beta_i, \alpha_j, \alpha_k) \\ & + D^\beta(2\bar{D}^\beta D^\alpha + \bar{D}^\alpha D^\beta)\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\alpha_i, \beta_j, \beta_k). \end{aligned} \quad (33)$$

Gilt nun $\bar{g} + 2H\dot{g} - 4\pi G\rho_H(g + 1) = 0$ (Gl.(21b)), so heben sich die Koeffizientenfunktionen von $I(\alpha)$ und $I(\beta)$ heraus (Beachte, daß $\overset{\circ}{\delta} = -I(\alpha) - I(\beta)$, $3\bar{a}a^2 = -4\pi G\rho_{H_0}$ gilt). Wir

erhalten schließlich:

$$\begin{aligned}
\epsilon = -\frac{1}{1+\delta} & [g^\alpha(g^\alpha+2)II(\alpha) + g^\beta(g^\beta+2)II(\beta) \\
& + (g^\alpha + g^\beta + g^\alpha g^\beta)\epsilon_{ijk}(\alpha_i, \beta_j, X_k) \\
& + 2g^\alpha g^\alpha(g^\alpha + \frac{3}{2})III(\alpha) + 2g^\beta g^\beta(g^\beta + \frac{3}{2})III(\beta) \\
& + g^\alpha(\frac{1}{2}g^\alpha + g^\beta + g^\alpha g^\beta)\epsilon_{ijk}(\beta_i, \alpha_j, \alpha_k) \\
& + g^\beta(\frac{1}{2}g^\beta + g^\alpha + g^\alpha g^\beta)\epsilon_{ijk}(\alpha_i, \beta_j, \beta_k)].
\end{aligned} \tag{34}$$

Gleichung (34) besagt, daß der Fehler $|\epsilon|$ eine wachsende Funktion der Zeit ist. Er wächst sogar schneller als die Störungen im linearen Regime. Man kann mit Hilfe der in Appendix C hergeleiteten funktionalen Abhängigkeiten zeigen, daß der Fehler für die diskutierte *Lösung* verschwindet. Das Maß $|\epsilon|$ kann in Anbetracht der Eigenschaften der Lösung als Abschätzung der Abweichungen von der lokalen Eindimensionalität der Bewegung aufgefaßt werden, allerdings nur im Rahmen des vorgegebenen Ansatzes.

Obwohl dieser Test für den Ansatz von Zel'dovich positiv interpretiert wird; (ich erinnere daran, daß die Endlichkeit des Fehlers auf der Kaustik es erlaubt abzuschätzen, daß für 92 % der Materie $|\epsilon| \leq 1$ gilt, vgl. I.2.), sehe ich diesen Test eher als Hinweis dafür, daß der Ansatz (25a) die Nichtlinearitäten der Gravitation nicht adäquat erfaßt. Wir werden diesen Punkt in Kapitel III aufgreifen sowie Rechtfertigungen des Ansatzes und Resultate des Kapitels II gegenüberstellen. Für die Untersuchung des nächsten Abschnitts sei noch darauf hingewiesen, daß die Berücksichtigung einer zweiten Vektorfunktion $\vec{\beta}$ das Anwachsen des Fehlers (34) durch das Auftreten gemischter Invarianten beschleunigt; das Aussterben der β -Mode für große Zeiten ist kein Argument für die Benutzung der Formel (E8b).

II.8. Numerische Auswertung der verallgemeinerten Approximation im Vergleich zur Standardtheorie und zu numerischen Simulationen

Wie in II.6. bereits kurz dargestellt, läßt sich die “Zel’dovich-Approximation” als Spezialfall der in II.7. definierten Approximation auffassen. Zel’dovichs’ Theorie impliziert dann, daß die Anfangsfelder der Pekuliargeschwindigkeit und der Pekuliarbeschleunigung “maximal korreliert” sind, d.h., die Raumabhängigkeit dieser Felder ist identisch: $\vec{U} = \vec{W} \cdot t_0$. Die Vorgabe von nur einer Vektorfunktion ist im Rahmen des Euler-Poisson-Systems zu speziell; die unabhängige Vorgabe von zwei Feldern wird durch die verallgemeinerte Approximation (II.7.) adäquat berücksichtigt. Sowohl in analytischen Betrachtungen, als auch in numerischen Simulationen, wird nur von “vektorieller Verrückung von Teilchen” gesprochen, die durch *eine* Potentialfunktion repräsentiert wird. Akzeptiert man die gemachten Näherungen, so kann man mit Hilfe der in II.7. definierten Approximation auch komplexere Probleme studieren. Man beginnt heute damit, das Fluktuationsspektrum abzuändern (z.B. “nicht-Gaußsche Verteilungen”), um die Konsequenzen für die nichtlineare Entwicklung zu untersuchen. In diesem Sinn ist die vorgestellte Approximation formuliert: Ich habe durch die Darstellung (25) betont, daß die unabhängige Vorgabe von Geschwindigkeits- und Dichtestörungen ein naheliegender und vor allem formal vollständiger Bestandteil solcher Betrachtungen sein kann. Ich werde diesen Punkt im Rahmen dieser Arbeit noch näher analysieren, (vgl. insbesondere II.8.3.). In den Abschnitten II.8.1. und II.8.2. wird die Approximation hinsichtlich der qualitativen Strukturbildung genauer untersucht. Diese Untersuchung beruht im wesentlichen auf einer hohen räumlichen Auflösung der Singularitätenstruktur.

II.8.1. Diskussion der Entwicklung von PANCAKES bis hin zu Proto-Galaxienhaufen mit hoher räumlicher Auflösung der Singularitätenstruktur

Für die folgenden Untersuchungen beziehen wir uns auf den zweidimensionalen Fall. Wir stellen zunächst die prinzipiellen Vorgänge dar, die im einzelnen im Rahmen numerischer Simulationen bereits verstanden sind, die jedoch am analytischen Modell in dieser Weise noch nicht veranschaulicht wurden. Es zeigt sich, daß Resultate aus numerischen Simulationen auch im Rahmen des analytischen Modells beobachtet werden können. Gleich-

zeitig verdeutlicht diese Betrachtung auch die Grenzen der analytischen Beschreibung in diesem Fall. Um Einzelheiten zu veranschaulichen, müssen wir die Singularitätenstruktur in der Weise räumlich auflösen, daß die auftretenden Vielstromsysteme in adäquater Weise behandelt werden; dies wurde als zweiter Punkt der Approximation in II.7. betont).

Will man die Dichte plotten, so müssen wir prinzipiell so vorgehen, daß die Funktion ρ (25b) vermöge der Transformation (25a) auf dem "Eulerschen Raum" dargestellt wird. Die Beträge der Dichtezweige in Gebieten mehrerer Ströme, (die einer mehrdeutigen Abbildung entsprechen), werden, im Sinn der Definition in II.7., addiert. Anstatt die "Funktion" ρ in dieser Weise zu behandeln, können wir auch die Trajektorien (25a) in einer "Eulerschen Ebene" sammeln und innerhalb kleiner Flächenelemente die Zahl der Trajektorien aufsummieren, um ein Maß für die Dichte zu erhalten. Im Rahmen von Untersuchungen über Gravitationslinsen wurde für Lichtstrahlen (in der Näherung der geometrischen Optik) ein entsprechendes numerisches Verfahren entwickelt ("inverse ray-tracing" bzw. "ray-shooting", vgl. Schneider & Weiß (1986,1987), Kayser et al. (1986)). Ich verwende ein entsprechendes, der vorliegenden Situation angepaßtes Programm. Um neben Geschwindigkeitsstörungen auch anfängliche Dichteeinhomogenitäten berücksichtigen zu können, ist die gewählte Darstellung (25) hinsichtlich der Wahl der Lagrangeschen Koordinaten geeignet, die bereits so angepaßt sind, daß die Trajektorien $\vec{F}$ zur Anfangszeit von einem homogenen "Gitter" $\{X_i\}$ ausgehen.

Wir sammeln für das folgende Modell 10^8 Trajektorien in 512^2 Flächenelementen einer "Eulerschen Ebene" $Z = \text{const}$. Das Resultat ist ein Maß für die Dichte im "Eulerschen Raum", genauer für den Wert:

$$[\det(F_{i,k})]^{-1} = \frac{1 + \delta(\vec{X}, Z = \text{const})}{1 + \delta(\vec{X})} =: \chi.$$

Wir benutzen einen Farb-Code, der 51 Farben unterscheidet, die auf sechs Farbfelder verteilt sind: Blau($\chi = 0 - 2$), Türkis($\chi = 2 - 4$), Grün($\chi = 4 - 6$), Gelb($\chi = 6 - 8$), Rot($\chi = 8 - 10$) und Weiß ($\chi > 10$); χ ist der mittlere Wert über eine Farbe. Die dunklen Farben in jedem Farbfeld helfen dem Auge, Dichtekonturen zu sehen. Die dunkelste Farbe des Blau-Feldes wurde auf Schwarz gesetzt; sie repräsentiert Dichteverteilungen von $1/5$ der mittleren Dichte ρ_H , die als "voids" (vgl. I.5.) interpretiert werden können. Materiekonzentrationen mit $|\delta| \leq 1$ ("lineares Regime") sind Blau dargestellt; Gebiete

mit Dichten größer als $10\rho_H$ ($\delta > 9$) repräsentieren Objekte hoher Dichte wie Filamente, Galaxienhaufen, etc.; diese enthalten die Kaustik und sind Weiß dargestellt.

Wir legen für die erste Betrachtung ein einfaches Modellspektrum zugrunde und wählen die Parameter so, daß die Approximation in die "Zel'dovich-Approximation" übergeht:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_1 &= \tilde{W}_1 = \sin(2\pi X) \cos(2\pi Y), \\ \tilde{U}_2 &= \tilde{W}_2 = \cos(2\pi X) \sin(2\pi Y).\end{aligned}\tag{35a}$$

Wir benutzen die dimensionslose Form, vgl. Appendix A.

Das Modell mit dem Spektrum (35a) ist geeignet, die Ausbildung eines "Netzwerks" und den anschließenden Einfall der Materie auf Proto-Galaxienhaufen aufzulösen, also Vorgänge, die auch bei generischen Anfangsbedingungen (vgl. II.8.2.) auftreten. Dies wurde bislang nur im Rahmen numerischer Simulationen betrachtet (vgl. Shandarin & Klypin (1984)). Das Resultat ist in Figur 5a im "Lagrangeschen Raum" und in Figur 5b im "Eulerschen Raum", allerdings nur in Schwarz/Weiß -Aufnahmen, abgebildet und diskutiert. (Farbaufnahmen werden für den generischen Fall (Figur 6) veröffentlicht (Buchert 1988a)).

II.8.2. Die Entwicklung eines Fourierspektrums mit "cut-off" bei separater Vorgabe von Geschwindigkeits- und Dichtestörungen

Für die zweite Betrachtung legen wir ein Fourierspektrum mit Gaußscher Verteilung der Amplituden zugrunde. Wir berücksichtigen dabei die separate Vorgabe von Geschwindigkeits- und Gravitationspotential im Sinn der verallgemeinerten Approximation:

$$\tilde{s}^0 = \mu_1 \sum_{\tilde{k}_{min}}^{\tilde{k}_{max}} \sum_{\tilde{k}_{min}}^{\tilde{k}_{max}} \frac{1}{|\tilde{k}|^2} \left\{ A(\tilde{k}) \cos(\tilde{k}\tilde{X}) + B(\tilde{k}) \sin(\tilde{k}\tilde{X}) \right\}, \tag{35b}$$

$$\tilde{\phi}^0 = \mu_2 \sum_{\tilde{k}_{min}}^{\tilde{k}_{max}} \sum_{\tilde{k}_{min}}^{\tilde{k}_{max}} \frac{1}{|\tilde{k}|^2} \left\{ C(\tilde{k}) \cos(\tilde{k}\tilde{X}) + D(\tilde{k}) \sin(\tilde{k}\tilde{X}) \right\}, \tag{35c}$$

$$|\tilde{k}|^2 \neq 0, \quad k_{1,2} = 2\pi l, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \text{etc...}$$

Die Amplituden A,B,C und D sind Gaußsche Zufallszahlen mit Standardabweichung 1 um den mittleren Wert 0. Wir benutzen auch hier die dimensionslose Form, vgl. Appendix A:

$$\overset{\circ}{s} = \overset{\circ}{s}/s_0, \quad \overset{\circ}{\phi} = \overset{\circ}{\phi}/\phi_0, \quad s_0 = q_0^2/t_0, \quad \phi_0 = q_0^2/t_0^2;$$

q_0 ist die maximale Wellenlänge $2\pi/k_{max} \cdot l_{max}$ der Störungen; sie hängt mit der “cut-off”-Wellenlänge zusammen: $2\pi/k_{max} = 1/4q_0 = \frac{40}{h_{100}} Mpc$, ($h_{100} = \frac{H|Z=0}{100 km/s Mpc}$). Wir wählen hier $\mu_1 = \mu_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ bei $Z_0 = 1000$, (vgl. z.B. Melott (1983b), Klypin & Shandarin 1983). Die relative Amplitude der Potentiale ist 1. Wir wählen einen flachen Hintergrund.

Die Figur 6a zeigt das Resultat für $l_{max} = 2$ für sechs aufeinanderfolgende “Euler-sche Ebenen”. Der gewählte Ausschnitt hat periodische Randbedingungen. Für diese Bilder wählte ich denselben Farb-Code wie im letzten Beispiel mit derselben räumlichen Auflösung (100 Millionen “Teilchen” auf 512^2 Flächenelementen). Diese Auflösung ist ausreichend, um die Metamorphose der Kaustiken, eingebettet in die globale “Netzstruktur” darzustellen, vgl. dazu die numerische Simulation von Melott (Fig.1). Die Figuren zeigen eine gute Auflösung der Bilder der Singularitätenstruktur, wie sie in der Arbeit von Arnol’d et al. (1982b) im Rahmen einer numerischen Simulation (allerdings nur lokal) aufgeschlüsselt wurde. Der Detailausschnitt (Fig.6b) zeigt die lokale Situation am analytischen Modell; (es handelt sich um den Ausschnitt der Figur 6a für $Z = 1$). Darunter wurde derselbe Ausschnitt für ein Spektrum mit $l_{max} = 4$ (d.i. insgesamt 162 Fouriermoden) geplottet. (Vgl. die Erläuterungen neben den Figuren und den Abschnitt “Ausblick auf weiterführende Arbeiten”). (Diese Figur wird in Farbe in (Buchert 1988a) publiziert).

Zur Interpretation dieser Bilder betrachten wir noch die Integralkurven in dimensionsloser Form (A6a) für den flachen Hintergrund:

$$\tilde{F} = \tilde{X} + \left(\frac{3}{5}g^\alpha - \frac{3}{5}g^\beta\right)\tilde{U} + \left(\frac{9}{10}g^\alpha + \frac{3}{5}g^\beta\right)\tilde{W}. \quad (35d)$$

Für große Zeiten in der Nähe des Kollapszeitpunkts gilt $g^\beta \approx -1$, so daß (35d) sich vereinfacht zu:

$$\tilde{F} \rightarrow \tilde{X} + \left(\frac{3}{5}g^\alpha + \frac{3}{5}\right)\tilde{U} + \left(\frac{9}{10}g^\alpha - \frac{3}{5}\right)\tilde{W}. \quad (35e)$$

Im Fall der “Zel’dovich-Approximation” erhalten wir einfach:

$$\tilde{\vec{F}} \rightarrow \tilde{\vec{X}} + \frac{3}{2} g^\alpha \tilde{\vec{U}}. \quad (35f)$$

Wählen wir wie oben ein Fourierspektrum $\vec{A}$ mit Gaußscher Verteilung der Amplituden für jedes der Potentiale, so wird sich die separate Vorgabe zweier Störungsfelder über die relative Amplitude der Spektren auf den Zeitpunkt des Materiekollaps auswirken. (Die Summe zweier Gaußscher Funktionen ist wieder eine Gaußsche Funktion, aber mit anderer Gesamtamplitude). Wählen wir $\vec{U} = \mu_1 \cdot \vec{A}$ und $\vec{W} = \mu_2 \cdot \vec{A}$, so ergibt sich i.A. eine Verschiebung des Kollapszeitpunkts im Vergleich zur “Zel’dovich-Approximation” bei gleicher Vorgabe der Anfangsamplitude des Dichtekontrasts. Diese Abhängigkeit wird im nächsten Teilabschnitt quantitativ diskutiert. Wir bemerken noch, daß selbst im Fall $\mu_1 = \mu_2$ verschiedene Gewichtungen (3/5 bzw. 9/10) der Spektren auftreten. (Betrachtet man jedoch statt der Amplituden der Potentiale die Amplituden von $\overset{\circ}{\delta}$ und $\overset{\circ}{\vec{U}}$, so sind für die obige Wahl der Amplituden die Gewichtungen identisch).

Das wesentliche Resultat der Untersuchungen dieses Teilabschnitts ist die Auflösung generischer Strukturelemente, d.i. das Auftreten aller möglichen Singularitäten im Entwicklungszusammenhang. Das Modell des Teilabschnitts II.8.1. ist in diesem Sinn nicht generisch. Ein interessantes Ergebnis ist, daß die Realisierung der Singularitätenstruktur im Verlauf der Entwicklung des betrachteten Spektrums Erscheinungsformen der Kaustik zeigt, die verschieden sind von der in der mathematischen Theorie abgeleiteten “Normalformen” (bei identischer lokaler Struktur). Ein auch in der Literatur bekanntes Beispiel ist die Erscheinungsform der Sichel bei zweidimensionalen PANCAKES im Vergleich zum symmetrischen Bild der entsprechenden Normalform., die in der Katastrophentheorie unter dem Namen “lips” bekannt ist. Im Rahmen der Theorie der Galaxienbildung interessiert aber neben der lokalen Struktur der Singularität auch deren “Real”-Erscheinungsbild (auch im globalen Strukturzusammenhang). Eine detaillierte Untersuchung der Metamorphosen der Singularitäten auch in drei räumlichen Dimensionen ist geplant, vgl. “Ausblick auf weiterführende Arbeiten”.

II.8.3. Zur Abhängigkeit des Kollapszeitpunkts von relativer Phase und relativer Amplitude der Störungsfelder

Im folgenden betrachten wir ein eindimensionales Modellspektrum. Akzeptiert man als wesentliches Charakteristikum eines Modellspektrums die Existenz einer Kohärenzlänge der Störungen, (vgl. z.B. das einfache Modell des Teilabschnitts II.8.1.), so lassen sich im Rahmen der verallgemeinerten Approximation drei Parameter auszeichnen, die die zeitliche Entwicklung des Spektrums und insbesondere die Kollapszeit der PANCAKES kontrollieren: Die relative Phase der Geschwindigkeits- und Feldstärkestörungen τ , die relative Amplitude dieser Störungen κ sowie die absolute Amplitude einer der Störungen zu einer vorgegebenen Anfangszeit (z.B. Rekombinationszeit). Im Standard-Modell wird neben der Kohärenzlänge nur letzterer Parameter variiert. Wir untersuchen im folgenden die Abhängigkeit des Kollapszeitpunkts von den ersten beiden Parametern. Dazu betrachten wir wiederum die Integralkurven in dimensionsloser Form für große Zeiten (35e). Der Kollapszeitpunkt Z_c wird festgelegt durch:

$$(1 + \frac{3}{5}g^\alpha(Z)|_{Z=Z_c} + \frac{3}{5})\tilde{U}_{1,1} + (\frac{9}{10}g^\alpha(Z)|_{Z=Z_c} - \frac{3}{5})\tilde{W}_{1,1} = 0. \quad (35g)$$

Wir betrachten das Modellspektrum:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= A \sin(k_1 X), \\ \tilde{W}_1 &= B \sin(k_2 X + \tau). \end{aligned} \quad (35h)$$

Aus (35g) und (35h) erhalten wir für $g^\alpha(Z) = \frac{1+Z_0}{1+Z} - 1$ folgende Abhängigkeit des Kollapszeitpunkts Z_c von den Parametern τ und $\kappa := \frac{A}{B}$:

$$Z_c(\kappa, \tau) = \frac{3}{5} \frac{\delta}{1 + \delta} (1 + Z_0) [\cos(\tau) - \kappa] - 1. \quad (35i)$$

Dieser Zusammenhang ist in Figur 7 aufgetragen.

Die hier durchgeführte Betrachtung zeigt, daß bei Änderung der relativen Amplitude verhältnismäßig starke Kollapszeitverschiebungen im Vergleich zur "Zel'dovich-Approximation" auftreten können. Betrachtet man statistische Spektren, so wirkt sich vor allem dieser Parameter auf die Kollapszeiten von PANCAKES aus. Relative Phasenverschiebungen wirken sich erst bei differenzierteren Untersuchungen aus. Wir sehen, daß die

verallgemeinerte Approximation durch Erhöhung der Zahl der freien Parameter, z.B. Kollapszeiten (und damit beobachtungsrelevante Daten) im Vergleich zur Standard-Theorie verändern kann. Die Erhöhung der Zahl der freien Parameter kann Probleme lösen, wie z.B. am "instabilen Neutrinomodell" (vgl. Doroshkevich et al. 1986) demonstriert wurde. In Anbetracht der Genauigkeit der zur Zeit verfügbaren Beobachtungsdaten fällt diese Modellverfeinerung noch innerhalb die Unsicherheitsgrenzen, (Klypin & Shandarin (1983) weisen daraufhin, daß diese Unsicherheit bis zu 50 % beträgt).

Insgesamt betrachte ich die *verallgemeinerte Approximation*, solange man die allgemeine Lösung des dreidimensionalen Problems nicht kennt, als eine geeignete und formal geschlossene Art der Beschreibung. Detaillierte Untersuchungen müssen in Bezug zu Beobachtungsdaten sowie durch Ausbau der theoretischen Grundlagen von Anfangsspektren erfolgen, (vgl. "Ausblick auf weiterführende Arbeiten").

III. KRITIK UND ERWEITERUNG DES STANDARD-BILDES

Die durch das Kapitel II nahegelegte Problemstellung:

Das Kapitel II nützt im wesentlichen die Tatsache aus, daß man die Nichtlinearitäten des vorliegenden Problems (II.1.) so einschränken kann, daß nur Terme mit räumlichen Ableitungen vernachlässigt werden (II.2., II.3.). Dies führt auf eine Lösungsklasse mit zwar nicht-trivialen, aber sehr eingeschränkten Anfangsbedingungen (II.5., Appendix C). Wie ausführlich dargestellt wurde, gewinnt diese Lösungsklasse ihre Bedeutung für die Kosmologie der Galaxienbildung durch die *Form* ihrer Lösungskurven (II.6.), die als verallgemeinerte Form einer durch numerische Simulationen gestützten approximativen Theorie betrachtet werden kann (II.7.). Die approximative Verwendung der Lösungskurven läßt sich auch aus den Eigenschaften der Lösung begründen. Eine Eigenschaft der Lösung ist z.B. die *Idealisierung* stark anisotroper Bewegungen auf einem Hintergrund, die als generisch für selbstgravitierende druckfreie Materie angesehen werden kann; (die Idealisierung besteht in der lokalen Eindimensionalität der Kontraktion, vgl. II.6.). Betrachtet man heute die Anwendung der "Zel'dovich-Approximation" auf das Problem der Galaxienbildung, so wird klar, daß man diesen Ansatz, obwohl er ursprünglich für selbstgravitierende Medien entwickelt wurde (vgl. I.1.), im Sinn einer "kinematischen Approximation" versteht, d.h. als eine Abwandlung der Bewegungsgleichung eines kräftefreien Mediums (vgl. I.4.). Dieser Standpunkt ist in Anbetracht des mangelhaften Verständnisses der analytischen Grundlagen, wie sie in Kapitel I dargestellt sind, in praktischer Hinsicht konsequent: Die bekannte allgemeine Lösung für die Entwicklung des kräftefreien Kontinuums läßt generische Anfangsdaten für die gesamte nichtlineare Entwicklung zu, die entstehenden Singularitäten sind vollständig klassifizierbar (vgl. I.5.), durch die Transformation des Zeitparameters (vgl. I.4.) gewährleistet diese Theorie auch, daß sie wesentliche Aspekte der bislang gebräuchlichen linearen Theorie enthält (vgl. II.6.) und sie ist, und das ist die wesentliche Rechtfertigung dieses Entwicklungs"modells", durch kinematische Argumente getützt, d.h. z.B. daß Kaustikstrukturen, wie sie in zahlreichen numerischen Simulationsrechnungen verifiziert wurden, bereits qualitativ in kinematischen Modellen wie der geometrisch-optischen Analogie (vgl. I.4.) auftreten. Numerische Rechnungen wurden unternommen, die den Effekt von Selbstgravitation vor dem Entstehen von

Singularitäten abzuschätzen versuchen, (vgl. auch I.2.). Diese zeigen, daß die Bewegung bis zur Singularität wesentlich durch die Kinematik der Teilchen bestimmt wird und daß Selbstgravitation erst *nach* der Singularität entscheidende qualitative Änderungen bewirkt (z.B. besteht durch Oszillationen der Teilchen um die Ebene der PANCAKES die großräumige Netzstruktur länger als im analytischen Modell, vgl. II.8.). In diesem Regime bricht jedoch die Eulersche Darstellung der analytischen Staublösung ohnehin zusammen, die Wechselwirkung des Vielstromsystems kann nur durch numerische Simulationen oder durch eine Verallgemeinerung des analytischen Modells (vgl. den Abschnitt "Ausblick auf weiterführende Arbeiten") erfaßt werden. Analytische Versuche anderer Autoren, die Effekte von Selbstgravitation zu berücksichtigen, verzichten entweder auf wesentliche Vorteile des "kinematischen Modells" (z.B. beruht das Modell von White & Silk (1979) auf der Annahme der *Homogenität* der Dichte) oder sie erforschen Selbstgravitation durch störungstheoretische Untersuchungen in höherer Ordnung (Grinstein & Wise 1987), was auf die interessierenden Spätstadien der Entwicklung nicht anwendbar ist. Diese beiden Argumente veranlassen im jetzigen Stadium der Forschung dazu, für kosmologisch relevante Fragen die "kinematische Approximation" nachwievor vorzuziehen (S.F. Shandarin, priv. Komm.). Dabei wird natürlich der Einfluß der (auf den betrachteten räumlichen Skalen sogar dominierenden) gravitativen Wechselwirkung praktisch nicht erfaßt. Allgemeine Aussagen, die aufgrund solcher kinematischen Modelle gemacht werden, müssen daher mit großer Vorsicht betrachtet werden (wie z.B.: Aussagen über Details räumlicher Strukturbildung, die noch weitgehend unverstanden sind, da die räumliche Auflösung der Strukturen in numerischen Simulationen noch sehr grob ist; die Aussage über die Singularitätenstruktur ist eine bislang unbewiesene Behauptung, vgl. III.2., oder Aussagen über den Zeitpunkt, wann die Materie zu PANCAKES kollabiert, u.s.f.).

Die Untersuchungen des Kapitels II greifen in diesem Sinn die ursprüngliche Motivation von Zel'dovich, eine nichtlineare Theorie für *selbstgravitierende* Medien zu schaffen, wieder auf. Die in Kapitel II unternommene detaillierte Untersuchung der Nichtlinearitäten führt zwar zu einer Reihe von Bestätigungen und Begründungen der "kinematischen Approximation", sie führt aber im Kern auf eine wesentliche Kritik: Die Anfangsbedingungen konstituieren sich aus einem nicht-generischen Satz (die Flächen verschwindender Gaußkrümmung bilden eine nicht-dichte Menge z.B. im Raum der C^∞ -Flächen). Es sei

hier auf ein Beispiel hingewiesen, wo solche Flächen als Anfangsbedingungen unwesentlicher "singulärer" Lösungsklassen verstanden werden (vgl. Courant, Hilbert 1968, zur Methode der Legendretransformation, Bd.II, Kap.1.6.). In Anbetracht dieses mathematischen Resultats des Kapitels II erscheint die approximative Anwendung auf selbstgravitierende Medien (vergißt man alle Rechtfertigungen) sogar absurd, insbesondere wenn man behauptet, daß die Approximation generisches Verhalten abbildet. In Kapitel II sind auch diejenigen Nichtlinearitäten angegeben, die für das generische Verhalten maßgeblich sind. Diese spielen im Abschnitt III.1. eine zentrale Rolle.

Es ergeben sich für eine weitere Untersuchung Fragen, die im Rahmen dieses Kapitels behandelt und zum Teil beantwortet werden können:

1. Ist das durch die "kinematische Approximation" beschriebene Verhalten für Zeiten bis zum Auftreten von Singularitäten "asymptotisch stabil", z.B. in dem Sinn, daß allgemeine selbstgravitierende Flüsse sich der maximal anisotropen Bewegung annähern. Was kann qualitativ in selbstgravitierenden Medien neu im Vergleich zur Approximation (hinsichtlich des zeitlichen Verhaltens und der räumlichen Strukturen) auftreten? Spricht das allgemeinere Verhalten gegen oder für die "kinematische Approximation"?
2. Entstehen in selbstgravitierenden Medien Lagrange- Singularitäten, d.h. sind die qualitativen Strukturelemente dieselben wie die der "kinematischen Approximation"?
3. Welche Rolle spielen anfängliche Rotationsstörungen für die nichtlineare Entwicklung der Strukturen? (Diese werden im Standard-Bild vernachlässigt).

Die Fragestellung 1 soll so präzisiert werden, daß nach Klassen strenger Lösungen in zwei räumlichen Dimensionen gefragt wird, die eine nicht-verschwindende Gaußsche Krümmung der (als Fläche im $\mathbb{R}^3$ aufgefaßten) Störpotentiale als Anfangsbedingung zulassen. Dies läßt sich durch Einbeziehung der in Kapitel II vernachlässigten "nichtlinearen Restglieder" im Rahmen allgemeinerer Lösungsansätze erreichen (III.1.). Diese Lösungen werden, abgesehen von der Einschränkung auf ebene Bewegungen, nicht weiter durch Symmetrieanahmen eingeschränkt. In diesem Zusammenhang sind auch strenge Lösungen interessant, die von Günter Götz gefunden wurden; in diesen Lösungen werden Druckkräfte berücksichtigt, ebenfalls ohne Symmetrieeinschränkung. Sie beschreiben z.B. aufgrund von Selbstgravitation kollabierende zweidimensionale Wirbel, die zu singulären eindimensionalen Konfigurationen ausarten und unterstützen damit die Erwartung, daß sich in selbstgra-

vitierenden Medien (selbst mit Berücksichtigung von Druckkräften) "PANCAKE-artige" Strukturen ausbilden, (vgl. Götz 1988).

Die Fragen 2 und 3 werden in III.2. und III.3. erörtert und führen auf entscheidende Kritikpunkte des Standard-Bildes.

III.1. Lösungsklassen mit nicht-verschwindender Gaußscher Krümmung der Anfangspotentialflächen

Dieser Abschnitt hat das Ziel, eine zweidimensionale Lösungsklasse zu finden, die, unter Berücksichtigung der in Kapitel II vernachlässigten Nichtlinearitäten, Anfangspotentialflächen mit nicht-verschwindender Gaußscher Krümmung zuläßt. Wir gehen aus von folgender Überlegung:

Die Vernachlässigung der "nichtlinearen Restglieder" $\vec{R}_1$ und $\vec{R}_2$ (vgl. II.2. und den Schluß des Appendix C) schränkt die Anfangsdaten auf abwickelbare Flächen ein. Deformiert man diese Flächen etwas, so entstehen im allgemeinen Flächen mit Gaußscher Krümmung, (was man sich durch eine einfache Störungsanalyse klar macht). Diese Krümmung entspricht zusätzlichen Kräften, welche die lokale Eindimensionalität der maximal anisotropen Bewegung der eingeschränkten Klasse des Kapitels II verzerren. Im Rahmen numerischer Simulationen ist der Einfluß dieser Kräfte nur schwer abzuschätzen, (vgl. I.3. zur CIC-Methode der Berücksichtigung kollektiver Vielteilcheneffekte). Es ist klar, daß die Vernachlässigung dieser Kräfte die Allgemeinheit der Lösungen wesentlich einschränken muß. Wie die eben-symmetrische Lösung, so enthält auch die natürliche Verallgemeinerung der "lokalen Eindimensionalität" diese wesentliche Schwierigkeit der Selbstgravitation nicht. Grinstein & Wise (1987) studieren höhere Ordnungen im Rahmen der Störungstheorie und finden Abweichungen vom durch die "Zel'dovich-Approximation" beschriebenen Verhalten. Diese Abweichungen sind auf Terme zurückzuführen, die strukturell mit den "nichtlinearen Restgliedern" verwandt sind. Vom Standpunkt der vollen nichtlinearen Entwicklung können solche störungstheoretischen Untersuchungen jedoch nur Hinweise liefern. Ich will daher *strenge* Lösungen konstruieren, die diese wesentlichen Nichtlinearitäten einbeziehen. Diese Untersuchung führt auch auf Einsichten über mögliche qualitative Eigenschaften der unbekannten allgemeinen Lösung. Außerdem ergibt sich eine interessante Eigenschaft der Lösung, die eine additive Abspaltung eines

homogenen Hintergrunds zuläßt, eine Eigenschaft, die in dem an die kosmologische Situation angepaßten Lösungsansatz des Kapitels II a priori gefordert wurde. Der vorgestellte Lösungsansatz enthält den in Appendix B verwendeten Ansatz als “singuläre” Unterklasse, d.h. die Anfangsbedingungen der Klasse des Appendix B erscheinen als nicht-generische Untermenge, die bei dem nun vorgestellten Ansatz ausgeschlossen werden muß .

Der Abschnitt III.1. ist wie folgt aufgebaut:

Eine *Integrationsmethode* der auf zwei räumliche Dimensionen eingeschränkten Gleichungen unter Verwendung der Lagrange-Methode wird vorgestellt (III.1.1.). Diese legt die Definition von *vektoriellen Erhaltungsgrößen* der Bewegung nahe, die vermöge Ansatz mit einer weiteren einschränkenden Annahme explizit gelöst werden können (III.1.2.). Wir untersuchen zunächst *hinreichende* Bedingungen an die Anfangsdaten, die aus den einschränkenden Annahmen folgen, danach untersuchen wir deren Verträglichkeit durch die Angabe von *notwendigen* Bedingungen an die Anfangsdaten (III.1.3.). Wir geben dann einige Klassen strenger Lösungen zusammen mit Beispielen an (III.1.4.) und diskutieren dann, was man anhand dieser Untersuchung auch im Hinblick auf Eigenschaften der unbekannten allgemeinen Lösung lernen kann (III.1.5.).

III.1.1. Ein Integral der Grundgleichungen in zwei räumlichen Dimensionen

Wir betrachten die Lagrange-Darstellung (8) des Systems (1) für $\Lambda = 0$.

Als *erste einschränkende Annahme* reduzieren wir das Problem auf zweidimensionale Bewegungen. Die Integralkurven $\vec{f} = \vec{f}(\vec{X}, t)$, $f_3 = X_3$ des Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}(\vec{X}, t)$, $v_3 = 0$ genügen den beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial(\vec{f}_1, f_1)}{\partial(X_1, X_2)} + \frac{\partial(\vec{f}_2, f_2)}{\partial(X_1, X_2)} = 0, \quad (36a)$$

$$\frac{\partial(\vec{f}_1, f_2)}{\partial(X_1, X_2)} - \frac{\partial(\vec{f}_2, f_1)}{\partial(X_1, X_2)} = -4\pi G \rho^0(X_1, X_2), \quad (36b)$$

oder in expliziter Notation:

$$R := \vec{f}_{1,2} f_{2,2} - \vec{f}_{2,2} f_{2,1} + \vec{f}_{1,1} f_{1,2} - \vec{f}_{1,2} f_{1,1} = 0,$$

$$D := \vec{f}_{1,1} f_{2,2} - \vec{f}_{1,2} f_{2,1} - \vec{f}_{2,1} f_{1,2} + \vec{f}_{2,2} f_{1,1} = -4\pi G \rho^0.$$

(Wir erinnern uns daran, daß ein Komma die partielle Ableitung nach Lagrangeschen Koordinaten bedeutet, daß ein Punkt die Lagrangesche Zeitableitung notiert und daß Komma und Punkt kommutieren, vgl. II.1.).

In Appendix B wird eine Lösungsklasse vorgestellt, die auf der Annahme einer nach Betrag und Richtung konstanten Feldstärke $\vec{g} = \vec{f}(\vec{X}, t)$ beruht. Diese *vektorielle* Erhaltungsgröße erfährt durch die folgende Untersuchung eine Verallgemeinerung.

Wir fragen zunächst nach Vektoren $\vec{\Omega}$ und $\vec{\Psi}$, für die folgendes gilt:

$$\nabla_0 \times \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla_0 \cdot \vec{\Psi} = D; \quad (37a, b)$$

(R und D sind die in (36) definierten Ausdrücke, ∇_0 notiert in diesem Abschnitt den Nablaoperator bezüglich Lagrangekoordinaten). Wir finden, daß z.B.

$$\vec{\Omega}_1 := (\vec{f} \cdot \nabla_0) \vec{f} + \vec{f} \times (\nabla_0 \times \vec{f})|_{f_s=0} \quad (38a)$$

und

$$\vec{\Psi}_1 := \vec{f} (\nabla_0 \cdot \vec{f}) - (\vec{f} \cdot \nabla_0) \vec{f} \quad (38b)$$

die verlangte Form besitzen. Die Idee ist, daß wir nun vektorielle Erhaltungsgrößen angeben können, die bestimmte Lösungsklassen definieren:

Die Forderung der Erhaltung von $\vec{\Psi}_1^*$ längs der Flüssigkeitspfade impliziert, daß wegen $\vec{\Psi}_1 = \vec{\Psi}_1(t=0)$ ein System von Gleichungen durch die Integralkurven erfüllt werden muß :

$$\vec{f}(\nabla_0 \cdot \vec{f}) - (\vec{f} \cdot \nabla_0) \vec{f} = \vec{G}(\nabla_0 \cdot \vec{X}) - (\vec{G} \cdot \nabla_0) \vec{X} = \vec{G}. \quad (39)$$

Explizit lautet das System (39):

$$\vec{f}_1 f_{2,2} - \vec{f}_2 f_{1,2} = G_1, \quad (39a)$$

$$\vec{f}_2 f_{1,1} - \vec{f}_1 f_{2,1} = G_2. \quad (39b)$$

Wegen

$$\nabla_0 \cdot \vec{\Psi}_1 = \nabla_0 \cdot \vec{G} = -4\pi G \rho^0 \quad (40)$$

wird die Quellgleichung (36b) von Lösungen des Systems (39) identisch erfüllt. Lösungen von (39) sind damit *selbstkonsistent* bezüglich der Dichte (vgl. die Diskussion dieses Kriteriums in I.2. und II.7.). Vom Standpunkt der frühen analytischen Tests (vgl. I.2.) wäre damit ein wesentlicher Teil des Problems der nichtlinearen Entwicklung zweidimensionaler Staubmedien auf die Lösung des Systems (39) reduzierbar (obwohl nicht alle Lösungen von (36b) dadurch erfaßt würden). Die Forderung (39) stellt eine natürliche Verallgemeinerung der vektoriellen Erhaltung der Feldstärke $\vec{g}$ längs der Flüssigkeitspfade dar, die Voraussetzung für die Lösungsklasse des Appendix B ist. Diese Verallgemeinerung enthält nach Konstruktion wesentliche Teile der in den Klassen des Kapitels II bzw. der kinematisch verwandten Klasse des Appendix B vernachlässigten Nichtlinearitäten, was schon durch die strukturelle Ähnlichkeit der "nichtlinearen Restglieder" $\vec{R}_1$ bzw. $\vec{R}_2$ und des Vektors $\vec{\Psi}_1$ äußerlich sichtbar ist.

Fordert man die Erhaltung von $\vec{\Psi}_1$ als *zweite einschränkende Bedingung* an die Lösungen, so ist die Selbstkonsistenz der Lösungen von (39) natürlich nicht hinreichend für die Lösung des Problems (36); die Integrabilitätsbedingung des Gravitationsfeldes (36a)

* Die Größen $\vec{\Psi}_1$ und $\vec{\Omega}_1$ sowie (aufgrund verschiedener Invarianzeigenschaften) auch strukturell verwandte Vektoren bilden einen Anreiz für eine weitergehende Untersuchung, die ich begonnen habe; ich möchte hier aber nur die Größe $\vec{\Psi}_1$ näher studieren.

liefert eine *hinreichende* einschränkende Bedingung an Lösungsansätze, konstruiert aus Lösungen des Systems (39), vgl. III.1.3..

Anmerkung:

Man kann eine konstruktive Methode angeben, die es gestattet, vektorielle Erhaltungsgrößen der Form $\vec{\Omega}_1$ oder $\vec{\Psi}_1$ zu bestimmen: Wir bemerken dazu, daß man die Gleichungen (36) z.B. als dritte Komponenten von Vektoren auffassen kann:

$$R = [\nabla_0 \vec{f}_1 \times \nabla_0 f_1 + \nabla_0 \vec{f}_2 \times \nabla_0 f_2]_3; \quad (41a)$$

$$D = [\nabla_0 \vec{f}_1 \times \nabla_0 f_2 - \nabla_0 \vec{f}_2 \times \nabla_0 f_1]_3. \quad (41b)$$

Vektoren der Form $\nabla_0 u \times \nabla_0 v$ sind solenoidal, d.h. $\nabla_0 u \times \nabla_0 v = \nabla_0 \times [u(\nabla v)] = \nabla_0 \times [v(\nabla u)]$. Man erhält dann für R und D: *

$$R = \left[\nabla_0 \times \left(\vec{f}_1(\nabla_0 f_1) + \vec{f}_2(\nabla_0 f_2) \right) \right]_{\partial/\partial X_3=0} \Big|_3 = \left[\nabla_0 \times \vec{\Omega}_1 \right]_3$$

$$D = \left[\nabla_0 \times \left(\vec{f}_1(\nabla_0 f_2) - \vec{f}_2(\nabla_0 f_1) \right) \right]_{\partial/\partial X_3=0} \Big|_3 = \left[\nabla_0 \times * \vec{\Psi}_1 \right]_3 = \nabla_0 \cdot \vec{\Psi}_1.$$

Betont man einen geometrischen Standpunkt, so lassen sich die Vektoren auch eleganter mit Hilfe des Formenkalküls herleiten. Wir schreiben die Gleichungen (36) erneut um, indem wir die 2-Formen $\tilde{R}$ und $\tilde{D}$ einführen:

$$\tilde{R} := d\vec{f}_1 \wedge df_1 + d\vec{f}_2 \wedge df_2 = R(dX^1 \wedge dX^2); \quad (42a)$$

$$\tilde{D} := d\vec{f}_1 \wedge df_2 - d\vec{f}_2 \wedge df_1 = D(dX^1 \wedge dX^2). \quad (42b)$$

Die Formen $\tilde{R}$ und $\tilde{D}$ sind geschlossen, so daß wir sie lokal durch totale Differentiale dP und dQ darstellen können ($df_3 = dt = 0$):

$$d\tilde{R} = 0 \Rightarrow \tilde{R} = dP;$$

$$d\tilde{D} = 0 \Rightarrow \tilde{D} = dQ.$$

* $(*\vec{\Psi}_1)$ notiert den orthogonalen Vektor $(\Psi_2, -\Psi_1, 0)$ in der Bewegungsebene; der Stern notiert auch in den folgenden Überlegungen den Hodge-Sternoperator, der in der Bewegungsebene operiert.

Die 1-Formen P und Q sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} P &:= \bar{f}_1 df_1 + \bar{f}_2 df_2 = \Omega_1 dX^1 + \Omega_2 dX^2; \\ Q &:= \bar{f}_1 df_2 - \bar{f}_2 df_1 = -\Psi_2 dX^1 + \Psi_1 dX^2, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} R &= *dP = *d(\Omega_1 dX^1 + \Omega_2 dX^2); \\ D &= *dQ = *d(\Psi_1 dX^1 + \Psi_2 dX^2); \end{aligned}$$

vgl. (36), (37), (38).

III.1.2. Ein Lösungsansatz für die Bestimmung zweidimensionaler Lösungen unter Erhaltung des Vektors $\vec{\Psi}_1$

Wir suchen Lösungskurven $\vec{f}$ in der Form:

$$\begin{aligned} f_1 &= X_1 + V_1(X_1, X_2)t + G_1(X_1, X_2)\alpha(X_1, X_2, t), \\ f_2 &= X_2 + V_2(X_1, X_2)t + G_2(X_1, X_2)\beta(X_1, X_2, t), \\ f_3 &= X_3; \quad V_3 = G_3 = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Wir setzen (43) in das System von Erhaltungsgrößen (39) ein und erhalten ein System *partieller* Differentialgleichungen. Mit einer *dritten einschränkenden Bedingung*: $\alpha = \beta =: \alpha$ läßt sich das Problem auf das folgende System nichtlinearer *gewöhnlicher* Differentialgleichungen für die durch die Einschränkung überbestimmte Funktion α reduzieren:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(\vec{G} + \vec{\epsilon}t + \vec{\Delta}\alpha) &= \vec{G} \\ \text{mit} \quad \vec{\epsilon} &:= \vec{G}(\nabla_0 \cdot \vec{V}) - (\vec{G} \cdot \nabla_0)\vec{V} = \begin{pmatrix} G_1 V_{2,2} - G_2 V_{1,2} \\ G_2 V_{1,1} - G_1 V_{2,1} \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \vec{\Delta} &:= \vec{G}(\nabla_0 \cdot \vec{G}) - (\vec{G} \cdot \nabla_0)\vec{G} = \begin{pmatrix} G_1 G_{2,2} - G_2 G_{1,2} \\ G_2 G_{1,1} - G_1 G_{2,1} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{44}$$

Wir bemerken, daß $\bar{\alpha} = 1$ eine Lösung dieses Satzes von Gleichungen liefert, falls $\vec{\epsilon} = \vec{\Delta} = \vec{0}$. Dies ist die zweidimensionale Unterklasse der Lösungsklasse des Appendix B. Man muß für die folgenden Rechnungen voraussetzen, daß $\vec{\epsilon}$ und $\vec{\Delta}$ nicht verschwinden; die Lösungsklasse des Appendix B kann damit als "singuläre" Klasse verstanden werden,

die nicht-generische Anfangsbedingungen zuläßt. Dies wurde bereits einleitend in der Problemstellung zu diesem Kapitel angedeutet. Die “nichtlinearen Restglieder” werden in (44) durch die Terme $\vec{\varepsilon}$ und $\vec{\Delta}$ in den Anfangsbedingungen repräsentiert. Damit enthalten die Anfangsdaten im Gegensatz zu den bislang vorgestellten Klassen auch Ableitungen der Felder. Die Zwangsbedingungen der Klasse des Appendix B für die zweidimensionale Unterklasse folgen aus der Forderung $\vec{\varepsilon} = \vec{0}$ und $\vec{\Delta} = \vec{0}$ durch Hinzunahme der intrinsischen Bedingung $\vec{G} = -\nabla_0 \overset{\circ}{\Phi}$:

Aus $\Delta_1 = 0$ und $\Delta_2 = 0$ folgt durch Elimination von G_1 bzw. G_2 : $\det(G_{i,k}) = 0$ und damit $G_2 = h_1(G_1)$; aus $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 = 0$ folgt analog $\det(V_{i,k}) = 0$ und damit $V_2 = h_2(V_1)$; eingesetzt in die Bedingungen $\vec{\varepsilon} = 0$ folgt die funktionale Abhängigkeit aller Komponenten von nur einer Funktion und wegen der Existenz einer Stromfunktion in zwei Dimensionen die Wirbelfreiheit von $\vec{V}$.

Das Verschwinden der nichtlinearen Terme $\vec{\varepsilon}$ und $\vec{\Delta}$ korrespondiert damit mit dem Verschwinden der Gaußschen Krümmung der Flächen $(X_1, X_2, \overset{\circ}{S}(X_1, X_2))$ und $(X_1, X_2, \overset{\circ}{\Phi}(X_1, X_2))$. Wir geben noch für den späteren Vergleich die Integralkurven dieser singulären Klasse hier an (vgl. Appendix B):

$$\begin{aligned}
 f_1 &= X_1 + \overset{\circ}{S}_{,1}(X_1, X_2)t - \overset{\circ}{\Phi}_{,1}(X_1, X_2)\frac{t^2}{2} \\
 f_2 &= X_2 + \overset{\circ}{S}_{,2}(X_1, X_2)t - \overset{\circ}{\Phi}_{,2}(X_1, X_2)\frac{t^2}{2} \\
 f_3 &= X_3, \quad \overset{\circ}{S}_{,3} = \overset{\circ}{\Phi}_{,3} = 0; \\
 \overset{\circ}{\Phi} &= \xi X_1 + \Gamma_1(\xi)X_2 + C(\xi), \quad 0 = X_1 + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi}X_2 + \frac{\partial C}{\partial \xi}, \\
 \overset{\circ}{S} &= \Gamma_2(\xi)X_1 + \Gamma_3(\xi)X_2 + \tilde{C}(\xi), \quad 0 = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \xi}X_1 + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \xi}X_2 + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \xi}. \\
 (\xi &:= \overset{\circ}{\Phi}_{,1}, \quad \Gamma'_2 C' = \tilde{C}').
 \end{aligned} \tag{45}$$

Wir führen jetzt die Funktionen γ_i ein durch:

$$\gamma_i := G_i + \varepsilon_i t + \Delta_i \alpha; \quad i = 1, 2; \quad \alpha(t=0) := 0. \tag{46}$$

Wir reduzieren dadurch (44) zu Gleichungen vom “Euler-Panlevé”-Typ:

$$\tilde{\gamma}_i \gamma_i = G_i \Delta_i; \quad i = 1, 2. \tag{47}$$

Um eine explizite Form des Lösungsansatzes zu erhalten, müssen wir (47) integrieren. Die Lösung kann mit Hilfe der Umkehrfunktion des Wahrscheinlichkeitsintegrals (vgl. Figur 8a) angegeben werden:

$$\begin{aligned} \nu &:= \text{inverf}(\tau) \\ \text{mit } \tau = \text{erf}(\nu) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\nu e^{-\tilde{\nu}^2} d\tilde{\nu}, \\ \frac{d\nu}{dt} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} C e^{\nu^2}, \quad -1 \leq \arg(\text{inverf}) \leq +1, \quad \text{inverf}(i\tau) = -i \text{inverf}(\tau). \end{aligned} \quad (48a)$$

Wir machen den folgenden Ansatz zur Lösung von (47):

$$\gamma_i = \gamma_{i0} \exp(-\nu_i^2), \quad \nu_i = \nu(C_i t + D_i) \quad (48b)$$

und bestimmen γ_{i0} , C_i und D_i durch Anfangsbedingungen, vgl. (43):

$$\gamma_i(t=0) = G_i = \gamma_{i0} \exp(-\nu_{i0}^2), \quad \nu_{i0} := \nu_i(t=0) = \nu(D_i), \quad (49a)$$

$$\dot{\gamma}_i(t=0) = \varepsilon_i = -2\gamma_{i0}\nu_{i0} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} C_i \right), \quad (49b)$$

$$\ddot{\gamma}_i(t=0) = \Delta_i = -2\gamma_{i0} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} C_i \right)^2 \exp(\nu_{i0}^2). \quad (49c)$$

Es folgt:

$$\gamma_{i0} := G_i \exp\left(\frac{\varepsilon_i^2}{-2G_i\Delta_i}\right); \quad \nu_{i0} := \left(\frac{\varepsilon_i^2}{-2G_i\Delta_i}\right)^{1/2}; \quad (50a, b)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} C_i := \left(\frac{\Delta_i}{-2G_i}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\varepsilon_i^2}{2G_i\Delta_i}\right); \quad D_i := \text{erf}\left[\left(\frac{\varepsilon_i^2}{-2G_i\Delta_i}\right)^{1/2}\right]. \quad (50c, d)$$

Der Lösungsansatz vereinfacht sich beträchtlich, wenn die Flüssigkeits-“teilchen” anfänglich in Ruhe sind ($V_i = 0$). Die Konstanten reduzieren sich dann auf:

$$\gamma_{i0} = G_i; \quad \nu_{i0} = 0; \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} C_i = \left(\frac{\Delta_i}{-2G_i}\right)^{1/2}; \quad D_i = 0. \quad (51a, b, c, d)$$

Wir schreiben den Lösungsansatz für Integralkurven von $\vec{v}$ in dieser vereinfachten Form explizit auf, die weitere Untersuchung wird aber hauptsächlich an der allgemeineren Form (48b, 50) durchgeführt:

$$\begin{aligned}
f_1 &= X_1 + \frac{G_1^2}{\Delta_1} \left(\exp \left\{ -\text{inverf}^2 \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left| \frac{\Delta_1}{-2G_1} \right|} t \right) \right\} - 1 \right), \\
f_2 &= X_2 + \frac{G_2^2}{\Delta_2} \left(\exp \left\{ -\text{inverf}^2 \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\left| \frac{\Delta_2}{-2G_2} \right|} t \right) \right\} - 1 \right), \\
f_3 &= X_3.
\end{aligned} \tag{52}$$

Dabei ist $\Delta_i \neq 0$ vorauszusetzen. Der Betrag unter der Wurzel im Argument des inverf ist dadurch gerechtfertigt, daß für negative Argumente der Wurzel $\text{inverf}^2(i\sqrt{\text{Arg}}) = (-1)^2 \text{inverf}^2(\sqrt{\text{Arg}})$ gilt.

III.1.3. Hinreichende und notwendige Einschränkungen der Anfangsbedingungen

-Hinreichende Zwangsbedingungen:

Neben der intrinsischen Bedingungen an die Anfangsdaten:

$$\nabla_0 \times \vec{G} = 0; \quad \nabla_0 \cdot \vec{G} = -4\pi G \rho^0, \tag{53a, b}$$

müssen wir die Einschränkungen näher betrachten, die einmal durch die Forderung der Konstanz von $\vec{\Psi}_1$, zum andern aus der Überbestimmtheit von α erwachsen (zweite und dritte einschränkende Bedingung). Erstere ist im Rahmen der in III.1.1. vorgestellten Integrationsmethode auch von prinzipiellem Interesse. Wir werden sehen, daß man durch die Forderung der Erhaltung von $\vec{\Psi}_1$ allein wichtige, sehr allgemeine Klassen erhalten kann. Letztere Einschränkung war zunächst unumgänglich, um den Zugang zu expliziten Lösungen zu ermöglichen. Es stellt sich heraus, daß selbst in diesem Fall Lösungsklassen konstruiert werden können, die auch Einblicke in die allgemeine Struktur der Lösungen gestatten.

Wir bilden die Rotation von $\vec{\Psi}_1$ bezügl. Lagrangescher Koordinaten. Die nicht-verschwindende dritte Komponente lautet:

$$\begin{aligned}
(\nabla_0 \times \vec{\Psi}_1)_3 &= \vec{f}_{2,1} f_{1,1} - \vec{f}_{1,1} f_{2,1} - \vec{f}_{1,2} f_{2,2} + \vec{f}_{2,2} f_{1,2} \\
&\quad + \vec{f}_2 (f_{1,1,1} + f_{1,2,2}) - \vec{f}_1 (f_{2,1,1} + f_{2,2,2}).
\end{aligned}$$

Sie verschwindet z.B. für die folgenden hinreichenden Bedingungen, die das Erfülltsein der Integrabilitätsbedingung (36a) garantieren:

$$(\nabla_0 \times \vec{\Psi}_1)_3 = -R = 0 \quad \text{für} \quad \nabla_0 \times \vec{f} = 0; \quad \vec{f} \times \Delta_0 \vec{f} = 0.$$

Wirbelfreiheit der Integralkurven bezüglich Lagrangescher Koordinaten gewährleistet, daß die Lösungen Lagrange-Singularitäten besitzen, (vgl. III.2.). Aus der Definition der Integralkurven

$$\vec{f} = \vec{X} + \int_0^t \vec{v}(\vec{X}, \tilde{t}) d\tilde{t}$$

folgt, daß das Geschwindigkeitsfeld wirbelfrei bezüglich Lagrangescher Koordinaten ist:

$$\nabla_0 \times \vec{v} = 0, \quad \text{insbesondere} \quad \nabla_0 \times \vec{V} = 0. \quad (53c)$$

(Aus der letzten Gleichung folgt Wirbelfreiheit von $\vec{v}$ im "Eulerschen Raum" aus einem bekannten Theorem von Cauchy & Lagrange). Wirbelfreiheit von $\vec{f}$ im "Lagrange-Raum" verlangt zusätzlich (vgl. 43):

$$(\nabla_0 \times \vec{V}) + \nabla_0 \times (\vec{G}\alpha) = 0. \quad (53d)$$

Die zweite aus der Integrabilitätsbedingung $R = 0$ folgende Gleichung erfordert:

$$\begin{aligned} & \tilde{\alpha} [(G_1 \Delta_0 V_2 - G_2 \Delta_0 V_1)t + (G_1 \Delta_0 (G_2 \alpha) - G_2 \Delta_0 (G_1 \alpha))] \\ &= \tilde{\alpha} [(G_1 \Delta_0 V_2 - G_2 \Delta_0 V_1)t + (G_1 \Delta_0 G_2 - G_2 \Delta_0 G_1)\alpha + 2(\alpha_{,2} \Delta_1 - \alpha_{,1} \Delta_2)] = 0. \end{aligned} \quad (53e)$$

Aus der Überbestimmtheit von α können wir für die Eindeutigkeit von α die hinreichende Bedingung $\alpha(\gamma_1) = \alpha(\gamma_2)$ verlangen, d.h.:

$$\frac{\gamma_1 - G_1}{\Delta_1} - \frac{\gamma_2 - G_2}{\Delta_2} - t \left(\frac{\varepsilon_1}{\Delta_1} - \frac{\varepsilon_2}{\Delta_2} \right) = 0. \quad (53f)$$

Die einschränkenden Gleichungen (53) sind kompatibel, falls der folgende Satz von Gleichungen an $\vec{V}, \vec{G}$ und α für alle Zeiten respektiert wird:

$$\nabla_0 \times \vec{G} = \vec{0}; \quad \nabla_0 \cdot \vec{G} = -4\pi G \rho; \quad (54a, b)$$

$$\nabla_0 \times \vec{V} = \vec{0}; \quad \vec{G} \times \Delta_0 \vec{V} = \vec{0}; \quad \vec{G} \times \Delta_0 \vec{G} = \vec{0}; \quad (54c, d, e)$$

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\Delta} = \vec{0}; \quad \vec{G} \times \vec{\Delta} = \vec{0}; \quad (54f, g)$$

$$\vec{G} \times \nabla_0 \alpha = \vec{0}; \quad \vec{\Delta} \times \nabla_0 \alpha = \vec{0}. \quad (54h, i)$$

Bemerkungen zur Herleitung von (54):

(54d und e) folgen aus (53e); die Vektornotation ist möglich durch den Gebrauch von (53a und c). Das Verschwinden der Koeffizientenfunktionen (54d und e) folgt daraus, daß α weder linear in t noch konstant ist. Das ist auch der Grund für das Verschwinden des Koeffizienten (54f) und (53f). Letzteres impliziert, daß gilt:

$$\frac{\gamma_1 - G_1}{\Delta_1} - \frac{\gamma_2 - G_2}{\Delta_2} = 0 \Rightarrow \tilde{\gamma}_1 \Delta_2 - \tilde{\gamma}_2 \Delta_1 = 0.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (47) folgt dann:

$$G_j \left(\frac{G_i}{\Delta_i} - \frac{G_j}{\Delta_j} \right) = \gamma_j \left(\frac{G_i}{\Delta_i} - \frac{G_j}{\Delta_j} \right); \quad i \neq j = 1, 2,$$

was bedeutet, daß für $\gamma_j \neq G_j$ (i.e. $\varepsilon_j \neq 0, \Delta_j \neq 0$) und $\gamma_j \neq \text{const.}$ (54g) gelten muß. Die Gleichungen für α (54h,i) folgen aus den Gleichungen (53d,e).

Der Satz (54a-g) ist vollständig: (54i) folgt aus (54g und h) und ist daher redundant; (54h) folgt aus (53a,c) und (53d).

Die Gleichungen (54a-g) bestimmen somit einen Satz *hinreichender* Zwangsbedingungen. Diese können zurückverfolgt werden auf 1. intrinsische Zwangsbedingungen (54a,b) 2. Zwangsbedingungen wegen der Konstanz von $\tilde{\Psi}_1$ (54c,d,e) und 3. Zwangsbedingungen wegen der Überbestimmtheit von α (54f,g). Wir bemerken noch, daß alle Vektoren in (54) orthogonal zur Bewegungsebene sind (vgl. die erste einschränkende Bedingung der ebenen Bewegung); ((54b) bestimmt lediglich die anfängliche Dichte).

Die ursprüngliche Forderung der Erhaltung von $\tilde{\Psi}_1$ führt uns auf die Bedingungen (54c,d,e). Da diese im Rahmen der vorgestellten Integrationsmethode (III.1.1.) von prinzipiellem Interesse sind, wollen wir noch die allgemeine lokale Lösung dieser Zwangsbedingungen bestimmen (Wir beachten dabei auch (54a,b)):

Wir bilden die Größen:

$$\Delta_0 \overset{\circ}{S} = V_{1,1} + V_{2,2} =: C_1(X_1, X_2); \quad (55a)$$

$$-\Delta_0 \overset{\circ}{\Phi} = G_{1,1} + G_{2,2} =: C_2(X_1, X_2). \quad (55b)$$

Es folgt:

$$\Delta_0 V_1 = V_{1,1,1} + V_{1,2,2} = V_{1,1,1} + V_{2,2,1} = C_{1,1}; \quad (55c)$$

$$\text{entsprechend:} \quad \Delta_0 V_2 = C_{1,2}; \Delta_0 G_1 = C_{2,1}; \Delta_0 G_2 = C_{2,2}. \quad (55d, e, f)$$

Die Einschränkungen (54d,e) lauten jetzt:

$$G_1 \Delta_0 V_2 - G_2 \Delta_0 V_1 = G_1 C_{1,2} - G_2 C_{1,1} = 0;$$

$$G_1 \Delta_0 G_2 - G_2 \Delta_0 G_1 = G_1 C_{2,2} - G_2 C_{2,1} = 0.$$

Wegen (54a) schließen wir, daß lokal folgendes gilt:

$$C_1 = F_1(\overset{\circ}{\Phi}); \quad C_2 = -F_2(\overset{\circ}{\Phi}),$$

wobei F_1 und F_2 beliebig sind. Damit sind lokal alle Lösungen von (54a,c,d,e) gegeben durch Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\Delta_0 \overset{\circ}{S} = F_1(\overset{\circ}{\Phi}), \quad \Delta_0 \overset{\circ}{\Phi} = F_2(\overset{\circ}{\Phi}); \quad F_1, F_2 \text{ beliebig.} \quad (56a, b)$$

Lösungen von (56a und d) bilden für sich betrachtet einen sehr allgemeinen Satz von Anfangsbedingungen, vor allem wenn man die Schwierigkeiten betrachtet, die i.A. (insbesondere wenn man mit Eulerschen Koordinaten arbeitet) durch weitere Einschränkungen der Poissongleichung für die Bestimmung von Anfangsbedingungen auftreten. Interessante Fälle im Rahmen der Kosmologie ergeben sich aus der Annahme $\Delta_0 \overset{\circ}{\Phi} \propto (\overset{\circ}{\Phi} + \text{const.})$ (Fourierspektrum der Fluktuationen) aber auch die Fälle $\Delta_0 \overset{\circ}{\Phi} \propto \exp(-\overset{\circ}{\Phi})$ ("Liouville"-Gleichung) oder $\Delta_0 \overset{\circ}{\Phi} \propto \sin(\overset{\circ}{\Phi})$ (verallgemeinerte "sine-Gordon"-Gleichung) sind interessant. Lösungen von (56a und b) respektieren die Gleichungen (54a-e), falls die Anfangsdichteverteilung gegeben ist durch $\overset{\circ}{\rho} = \frac{-1}{4\pi G} F_2(\overset{\circ}{\Phi})$.

Um die Verträglichkeit dieser Einschränkung mit den zusätzlichen Bedingungen (54f und g) für spezielle Lösungsklassen zu untersuchen, bestimmen wir im folgenden die *notwendigen* Zwangsbedingungen, die durch den Lösungsansatz an die Anfangsdaten gestellt werden müssen. Sie sind z.B. notwendig dafür, daß die räumlichen Koeffizienten *Funktionen* anstatt vektorielle Größen sind. Man sieht allerdings bereits aus den hinreichenden Bedingungen (54), daß die Annahme $\frac{\varepsilon_1}{\Delta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\Delta_2}$ und $\frac{G_1}{\Delta_1} = \frac{G_2}{\Delta_2}$ für spezielle *homogene Lösungen* des Problems mit den anderen Einschränkungen verträglich ist. Dies wird im folgenden Teilabschnitt eingehender behandelt.

Wir geben noch eine anschauliche Interpretation der obigen Bedingung. Wir führen die Funktionen N und M ein:

$$\frac{\varepsilon_i}{\Delta_i} =: N(X_1, X_2); \quad \frac{G_i}{\Delta_i} =: M(X_1, X_2); \quad i = 1, 2.$$

Wir eliminieren jeweils G_1 und G_2 und erhalten:

$$\left(\frac{N}{M}\right)^2 - \text{Spur}(V_{i,k}) \frac{N}{M} + \det(V_{i,k}) = 0; \quad (58a)$$

$$\left(\frac{1}{M}\right)^2 - \text{Spur}(G_{i,k}) \frac{1}{M} + \det(G_{i,k}) = 0, \quad (58b)$$

d.h., die Funktionen $\frac{N}{M}$ und $\frac{1}{M}$ sind Eigenfunktionen der (symmetrischen) Tensoren $(V_{i,k})$ und $(G_{i,k})$ auf dem "Lagrange-Raum". Im Fall der *isotropen* homogenen Lösung sind die beiden (identischen) Eigenwerte konstant, vgl. III.1.4. .

- Notwendige Zwangsbedingungen:

Um sämtliche notwendigen Bedingungen zu bestimmen, gehen wir nun so vor, daß wir den in III.1.2. diskutierten Lösungsansatz in der Form

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \vec{X} + (\vec{V} - N\vec{G})t + \vec{G}M \left(e^{\nu_0^2 - \nu^2} - 1 \right); \\ \nu &= \nu(Ct + D); \quad C := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{-1}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{N^2}{2M} \right); \quad D := \text{erf} \left[\left(\frac{N^2}{2M} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (60)$$

verwenden und dann in die ursprünglichen Gleichungen (36) einsetzen. Dabei behandeln wir N und M zunächst als beliebige Funktionen, die durch die Gleichungen eingeschränkt werden.

Wir betrachten als erstes den Fall räumlich konstanter Funktionen N und M . Für diesen Fall erhalten wir aus (36) direkt den folgenden Satz notwendiger Bedingungen an die Anfangsfelder $\vec{V}$ und $\vec{G}$:

aus (36a):

$$G_{2,1} - G_{1,2} = 0; \quad (61a)$$

$$\frac{\partial(G_1, V_1)}{\partial(X_1, X_2)} + \frac{\partial(G_2, V_2)}{\partial(X_1, X_2)} = 0; \quad (61b)$$

aus (36b):

$$2M \det(G_{i,k}) = \text{Spur}(G_{i,k}) = -4\pi G_0^0; \quad (61c)$$

$$2N \det(G_{i,k}) = \frac{\partial(G_1, V_2)}{\partial(X_1, X_2)} - \frac{\partial(G_2, V_1)}{\partial(X_1, X_2)}. \quad (61d)$$

Als zweites seien die Bedingungen angegeben, die sich aus (36) für räumlich abhängige Funktionen ergeben. Wir beschränken uns hier auf den Fall $V_i = 0, N = 0, M = M(X_1, X_2)$, Ansatz (52):

Wir erhalten aus (36) durch Einsetzen von (60) für $N = 0$ folgende notwendigen Bedingungen an M und $\vec{G}$:

aus (36a):

$$G_{2,1} - G_{1,2} = 0; \quad (62a)$$

$$M_{,2}G_1 - M_{,1}G_2 = 0; \quad (62b)$$

$$M_{,2}\nabla_1 - M_{,1}\nabla_2 = 0; \quad (62c)$$

aus (36b):

$$M_{,1}\Delta_1 + M_{,2}\Delta_2 + 2M \det(G_{i,k}) = \text{Spur}(G_{i,k}) = -4\pi G\rho^0; \quad (62d)$$

$$M_{,1} \left(\Delta_1 - \frac{G_1}{M} \right) + M_{,2} \left(\Delta_2 - \frac{G_2}{M} \right) = 0, \quad (62e)$$

wobei $\vec{\Delta}$ der in (44) definierte Vektor ist und ∇_1 und ∇_2 die beiden nichtverschwindenden Komponenten des Vektors

$$\vec{\nabla} := (\vec{G} \cdot \nabla_0) \vec{G} + \vec{G} \times (\nabla_0 \times \vec{G}) = \begin{pmatrix} G_1 G_{1,1} + G_2 G_{2,1} \\ G_1 G_{1,2} + G_2 G_{2,2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind (vgl. die strukturelle Verwandtschaft dieses Vektors mit dem Vektor $\vec{\Omega}_1$ aus III.1.1.!).

Für die in (61) und (62) dargestellten notwendigen Bedingungen geben wir im nächsten Abschnitt Lösungen an, die nach Konstruktion Klassen zweidimensionaler Lösungen des zugrundegelegten Euler-Poisson-Systems sind.

III.1.4. Einige Klassen strenger Lösungen mit Beispielen

- Der homogene Hintergrund:

Eine wichtige Eigenschaft des in III.1.2. vorgestellten Lösungsansatzes ist, daß er homogene Lösungen des Systems erzeugt (dies ist im Fall der Lösungsklasse des Appendix B nur in einer räumlichen Dimension wahr (vgl. Appendix B zum eindimensionalen Hintergrund); im Fall der Lösungen des Kapitels II ist der (dreidimensionale) Hintergrund per Ansatz als Unterklasse implementiert worden, was hier a priori nicht geschehen ist).

Wir betrachten zunächst die Lösung der auf zwei räumliche Dimensionen eingeschränkten Gleichungen im Fall homogener *isotroper* Deformationen * (die Isotropie ist eine Folge der "dritten einschränkenden Bedingung"):

$$f_{Hi} = r(t)X_i, \quad i = 1, 2; \quad f_{H3} = X_3. \quad (63a)$$

Aus (36) folgt daraus die Differentialgleichung:

$$2\tilde{r}r = -4\pi G\rho_{H_0}. \quad (63b)$$

Wir setzen die Lösung von (63b) an in der Form:

$$r = r_0 e^{-\nu_H^2}; \quad \nu_H = \nu(C_H t + D_H) \quad (63c)$$

und bestimmen die Konstanten r_0 , C_H und D_H durch Anfangsbedingungen der homogenen Lösung (63a):

$$\begin{aligned} f_{Hi}(t=0) &= (r)^0 X_i =: X_i, (r)^0 = r(t=0) := 1; \\ v_{Hi}(t=0) &= (\dot{r})^0 X_i =: V_{Hi}, (\dot{r})^0 = \dot{r}(t=0); \\ g_{Hi}(t=0) &= (\tilde{r})^0 X_i =: G_{Hi}, (\tilde{r})^0 = \tilde{r}(t=0). \end{aligned} \quad (63d)$$

Wir erhalten die folgende Identifizierung der Konstanten $N =: N_H$ und $M =: M_H$ durch Vergleich mit dem Ansatz (60):

$$r_0 = e^{-\frac{N_H^2}{2M_H}}, \quad (\dot{r})^0 = \frac{N_H}{M_H}, \quad (\tilde{r})^0 = -2\pi G\rho_{H_0} = \frac{1}{M_H}. \quad (63e)$$

* Ich verwende für Hintergrund- bzw. Pekuliargrößen dieselben Buchstaben wie im dreidimensionalen Fall des Kapitels II.

Ausgedrückt durch die Konstanten N_H und M_H lautet die homogene Lösung:

$$f_{Hi} = e^{\eta_{H0}^2 - \eta_H^2} X_i; \\ \eta_{H0}^2 = -\frac{N_H^2}{2M_H}, \quad \eta_H = \eta \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{-1}{2M_H}} e^{\frac{N_H^2}{2M_H}} t + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{-N_H^2}{2M_H}} \right) \right). \quad (63f)$$

Die Anfangsbedingungen $V_{Hi} = \frac{N_H}{M_H} X_i$ ($V_{H3} = 0$) und $G_{Hi} = \frac{1}{M_H} X_i$ ($G_{H3} = 0$) erfüllen die Zwangsbedingungen (61) identisch.

- *Eine Klasse mit nicht-trivialem Pekuliargeschwindigkeitsfeld auf dem anfänglich homogenen Hintergrund:*

Wir schränken wie vorher die anfängliche Dichteverteilung auf eine homogene Verteilung ein. Damit sind die Gleichungen (61a und c) identisch erfüllt. Die Bedingungen (61b und d) lassen dann nicht nur lineare Geschwindigkeitsfelder zu. Wir erhalten aus (61b und d) mit der Annahme $\vec{G} = \vec{G}_H$:

$$V_{2,1} - V_{1,2} = 0, \quad V_{1,1} + V_{2,2} = 2 \frac{N}{M_H}, \quad (64a, b)$$

d.h. das Geschwindigkeitspotential erfüllt eine Poissongleichung bzgl. Lagrangescher Koordinaten zur Zeit $t = 0$:

$$\Delta_0 \overset{\circ}{S} = 2 \frac{N}{M_H}. \quad (64c)$$

Wir führen jetzt ein Pekuliargeschwindigkeitspotential $\overset{\circ}{s}$ ein durch:

$$\overset{\circ}{S} = \overset{\circ}{S}_H + \overset{\circ}{s}; \quad \vec{V}_H = \nabla_0 \overset{\circ}{S}_H, \quad N := N_H. \quad (64d)$$

Dann gilt:

$$\Delta_0 \overset{\circ}{S}_H = 2 \frac{N_H}{M_H}, \quad \Delta_0 \overset{\circ}{s} = 0, \quad (64e)$$

d.h., das Pekuliargeschwindigkeitspotential zur Zeit $t = 0$ erfüllt eine Laplacegleichung. Die Integralkurven dieser Klasse können wir in der Form einer Inertialbewegung auf dem Hintergrund schreiben (vgl. (60)):

$$\vec{f} = \vec{f}_H + \nabla_0 \overset{\circ}{s} \cdot t. \quad (65a)$$

Beispiele strenger Lösungen lassen sich aus Lösungen der Laplacegleichung konstruieren. Wir sind daran interessiert, reguläre Geschwindigkeitsfelder in der Form kleiner Fluktuationen um den homogenen Hintergrund zu konstruieren. Solche Felder können im Rahmen der Laplacegleichung nur auf beschränkten Gebieten konstruiert werden, da Lösungen der Laplacegleichung i.A. im Unendlichen oder im Ursprung divergieren.

Wir können die Laplacegleichung z.B. durch bekannte Reihen der Form:

$$\begin{aligned} \mathring{s} = \sum_i \sum_j & A_i \cos(a_i X) \cosh(a_i Y) + A_j \cosh(a_j X) \cos(a_j Y) \\ & + B_i \sin(b_i X) \cosh(b_i Y) + B_j \cosh(b_j X) \sin(b_j Y) \\ & + C_j \cos(c_j X) \sinh(c_j Y) + C_j \sinh(c_j X) \cos(c_j Y) \\ & + D_i \sin(d_i X) \sinh(d_i Y) + D_j \sinh(d_j X) \sin(d_j Y) \end{aligned} \quad (65b)$$

lösen.

Wir betrachten die Dichte in Einheiten der Hintergrunddichte:

$$\frac{\rho}{\rho_H} = \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{r(t)}\right)^2 \det(\mathring{s}_{,i,k})}; \quad \rho_H = \frac{\rho_{H_0}}{(r(t))^2}. \quad (65c)$$

Der Dichtekontrast $\delta = \frac{\rho}{\rho_H} - 1$ wächst in diesen Lösungen als Folge einer nicht-verschwindenden (negativen) Gaußschen Krümmung der Fläche des Pekuliarpotentials $\mathring{s}$:

$$\delta = \frac{-\lambda(t) \det(\mathring{s}_{,i,k})}{1 + \lambda(t) \det(\mathring{s}_{,i,k})}; \quad \lambda(t) := \left(\frac{t}{r(t)}\right)^2. \quad (65f)$$

An Orten positiver Gaußscher Krümmung der Fläche $(X_1, X_2, \mathring{s}(X_1, X_2))$ würde die Dichte entsprechend abfallen und sich der homogenen Verteilung annähern; die Lösungen der Laplacegleichung führen jedoch stets auf eine negative Gaußkrümmung für wirbelfreie Felder: $\det(\mathring{s}_{,i,k}) = -v_{1,1}^2 - v_{1,2}^2 \leq 0$; für Wirbel gilt stets: $v_{1,1}^2 + v_{1,2}^2 \geq 0$, letztere sind aber keine Lösungen unter den gemachten Voraussetzungen. In Figur 8b ist die Zeitabhängigkeit des Dichtekontrasts für die Lösung (65) veranschaulicht.

Wir wollen noch ein Beispiel konstruieren, welches besonders anschaulich die Wirkung der Rücktransformation in den "Eulerschen Raum" aufzeigt: Wir schreiben die Lösung für den Dichtekontrast (65f) in der allgemeinen Form:

$$\delta = \frac{4\lambda(t)w_1''w_2''}{1 - 4\lambda(t)w_1''w_2''}; \quad (65g)$$

$\mathring{s} = w_1(X + iY) + w_2(X - iY)$ ist die allgemeine Lösung der Laplacegleichung; (der Strich notiert die Ableitung nach dem Argument). Wir wählen:

$$w_1'' = \frac{X + iY}{2}, w_2'' = \frac{X - iY}{2} \Rightarrow 4w_1''w_2'' = X^2 + Y^2. \quad (65h)$$

Wir erhalten dadurch im "Lagrange-Raum" für alle Zeiten eine Verteilung des Dichte-kontrasts mit kreisförmigen Konturlinien. Im "Eulerschen Raum" werden Bilder dieser Kreise für $t > 0$ zu asymmetrischen Figuren mit drei "cusp"-Spitzen, vgl. Figur 9. Das Pekuliarpotential $\mathring{s}$ ist bei der Annahme (65h) reell:

$$\mathring{s} = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{2}XY^2 + C_1X + C_2; C_1, C_2 = \text{const.}; \quad (65i)$$

(für $C_1 = -1$ verhält es sich lokal wie $-\sin X$ auf dem Schnitt $Y = 0$).

Anmerkung:

Ich möchte an dieser Stelle betonen, daß die Divergenzfreiheit des pekuliaren Geschwindigkeitsfeldes auf dem "Lagrange-Raum" (64e) sich nicht in den "Eulerschen Raum" überträgt. Dies ist ein weiterer Vorzug der verwendeten Lagrange-Methode. Arbeitet man mit der Eulerschen Darstellung, so impliziert z.B. die Bedingung $\Delta S(\vec{x}, t) = 0, \vec{v} = \nabla S$, Inkompressibilität der Flüssigkeit, ein für das vorliegende Problem uninteressanter Fall; gilt jedoch $\Delta_0 S(\vec{X}, t) = 0$, so folgt i.A. nicht die Divergenzfreiheit im "Eulerschen Raum" ($J := \det(f_{i,k})$):

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{1}{J}(S_{,1,1}f_{2,2} - S_{,1,2}f_{2,1} - S_{,2,1}f_{1,2} + S_{,2,2}f_{1,1}) \\ &= \frac{1}{J}(\Delta_0 S + S_{,1,1} \int_0^t S_{,2,2} dt - S_{,1,2} \int_0^t S_{,2,1} dt - S_{,2,1} \int_0^t S_{,1,2} dt + S_{,2,2} \int_0^t S_{,1,1} dt) \\ &= \frac{-2}{J}(S_{,1,1} \int_0^t S_{,1,1} dt + S_{,1,2} \int_0^t S_{,1,2} dt) \\ &\text{für } S_{,1,1} = -S_{,2,2}; S_{,2,1} = S_{,1,2} \Leftrightarrow \Delta_0 S = 0. \end{aligned}$$

Gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen zu allen Zeiten im "Lagrange-Raum", so gilt dies nicht im "Eulerschen Raum". Im vorliegenden Fall der diskutierten Klasse gilt sogar $s = \mathring{s}$ für das Pekuliarpotential; in diesem Fall ist die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes:

$$\Delta S = \frac{1}{J}(2\dot{r}r + 2\det(\mathring{s}_{,i,k}) \cdot t), \quad (65j)$$

d.h., nur im Fall eines verschwindenden Hintergrunds und verschwindender Gaußscher Krümmung von $(X_1, X_2, \overset{\circ}{s}(X_1, X_2))$ überträgt sich die Eigenschaft der Divergenzfreiheit, (vgl. auch die Diskussion in III.1.5.).

- *Eine Klasse mit nicht-trivialer Dichteverteilung auf dem homogenen Hintergrund:*

Wir können für diese Klasse zwei Fälle unterscheiden: 1. $V_i = 0, N = 0$; 2. $V_i = NG_i$. Im ersten Fall betrachten wir nur eine anfängliche Dichteverteilung ruhender Teilchen, im zweiten Fall nützen wir noch die Freiheit aus, daß bei gleicher Dichteverteilung ein der Feldstärke proportionales Geschwindigkeitsfeld zugelassen werden kann. In beiden Fällen verschwindet der Koeffizient von t im Ansatz (60), die Bedingungen (61b und d) sind identisch erfüllt. Die einzige Einschränkung des Gravitationspotentials ist gegeben durch die Gleichung (61c):

$$2M \det(\overset{\circ}{\Phi}_{,i,k}) = -\text{Spur}(\overset{\circ}{\Phi}_{,i,k}) = -4\pi G \overset{\circ}{\rho}; \quad (66a)$$

(eine analoge Gleichung gilt für das Geschwindigkeitspotential). Die Gleichung (66a) ist z.B. für den homogenen Hintergrund (63) erfüllt ($M := M_H, \overset{\circ}{\Phi} := \overset{\circ}{\Phi}_H$). Wir führen das Pekuliarpotential $\overset{\circ}{\phi}$ und den Dichtekontrast $\overset{\circ}{\delta}$ ein:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Phi} &= \overset{\circ}{\Phi}_H + \overset{\circ}{\phi}; \quad \overset{\circ}{\Phi}_H = -\frac{1}{2M_H}(X^2 + Y^2) \\ \overset{\circ}{\rho} &= \overset{\circ}{\rho}_H(1 + \overset{\circ}{\delta}); \quad \overset{\circ}{\rho}_H = -\frac{1}{2\pi G M_H}. \end{aligned} \quad (66b)$$

Die Gleichung (66c) ergibt mit (66b) für $M := M_H$:

$$2M_H \det(\overset{\circ}{\phi}_{,i,k}) = +\text{Spur}(\overset{\circ}{\phi}_{,i,k}) = -\frac{2}{M_H} \overset{\circ}{\delta}. \quad (66c)$$

Um alle Lösungen von (66c) zu bestimmen, führen wir das Hilfspotential Z ein:

$$Z := \hat{\phi} - \frac{1}{2}(X^2 + Y^2), \quad \hat{\phi} := 2M_H \overset{\circ}{\phi}. \quad (66d)$$

Damit reduziert sich (66c) auf:

$$Z_{,1,1}Z_{,2,2} - Z_{,1,2}^2 = 1. \quad (66e)$$

(66e) bedeutet, daß die Abbildung des "Lagrange-Raumes" (X, Y) in den Raum der "reduzierten" Pekuliarfeldstärken (Z_1, Z_2) flächenerhaltend ist. Für solche Abbildungen läßt sich eine integralfreie Darstellung der "reduzierten" Feldstärken mittels einer zunächst beliebigen Funktion $\omega = \omega(\alpha, \beta)$ angeben, (Courant, Hilbert 1968 Bd.II, Anhang zu Kap.I §4); α und β sind Parameter, die dann die Lösung von (66e) parametrisieren:

$$\begin{aligned} u &= Z_1 = \alpha - \omega_\beta, & X &= \alpha + \omega_\beta; \\ v &= Z_2 = \beta + \omega_\alpha, & Y &= \beta - \omega_\alpha; \end{aligned} \quad (66f)$$

Dabei ist:

$$u = u(\alpha, \beta), \quad X = X(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta), \quad Y = Y(\alpha, \beta).$$

Wir müssen für Lösungen von (66e) allerdings fordern, daß die unterbestimmte Differentialgleichung $u_{,1}v_{,2} - u_{,2}v_{,1} = 1$ noch der Integrabilitätsbedingung $u_{,2} = v_{,1} \Leftrightarrow Z_{1,2} = Z_{2,1}$ genügt. Dies führt zu einer Einschränkung der Funktion ω , die im Parameterraum eine Laplacegleichung erfüllen muß :

$$\omega_{,\alpha,\alpha} + \omega_{,\beta,\beta} = 0. \quad (66g)$$

Wir haben dabei die Transformationsformeln

$$\alpha_{,1} = \frac{Y_{,\beta}}{J_\omega}; \quad \alpha_{,2} = \frac{-X_{,\beta}}{J_\omega}; \quad \beta_{,1} = \frac{-Y_{,\alpha}}{J_\omega}; \quad \beta_{,2} = \frac{X_{,\alpha}}{J_\omega} \quad (66h)$$

mit $J_\omega := 1 + \omega_{,\alpha,\alpha}\omega_{,\beta,\beta} - \omega_{,\alpha,\beta}\omega_{,\beta,\alpha} \neq 0$ verwendet.

Die Lösungskurven dieser Klasse lassen sich vermöge (66b) wiederum als Summe der homogenen Deformation und einer endlichen Abweichung von der Homogenität darstellen:

$$\vec{f} = \vec{f}_H + \vec{p}; \quad f_{Hi} = r(t)X_i, \quad f_{H3} = X_3 \quad (67a)$$

Der Vektor $\vec{p}$ ist bestimmt durch (60) und (66), (seine dritte Komponente verschwindet):

$$\vec{p} := -\nabla_0 \overset{\circ}{\phi} \cdot M_H(r(t) - 1); \quad \overset{\circ}{\phi} = \frac{1}{2} \left(\frac{Z}{M_H} - \overset{\circ}{\Phi}_H \right). \quad (67b)$$

Das Anwachsen des Dichtekontrasts kann hier wieder auf eine nicht-verschwindende (negative) Gaußsche Krümmung der Fläche des Störpotentials (hier des Potentials der Pekuliarfeldstärke) zurückgeführt werden:

$$\left(\frac{\rho}{\overset{\circ}{\rho}} \right)^{-1} = r^2(t) + M_H^2 \det(\overset{\circ}{\phi}_{,i,k}) [(r-1)^2 - 2r(r-1)]. \quad (67c)$$

Dem Betrag nach ist die Gaußkrümmung von $(X_1, X_2, \overset{\circ}{\phi})$ dem Dichtekontrast zur Zeit $t = 0$ proportional:

$$-\det(\overset{\circ}{\phi}_{,i,k}) = \frac{1}{M_H^2} \overset{\circ}{\delta} \quad (\text{vgl. (66c)}). \quad (67d)$$

Für den Dichtekontrast erhalten wir mit (66) und (67d) explizit:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\overset{\circ}{\delta} - \mu(t) M_H^2 \det(\overset{\circ}{\phi}_{,i,k})}{1 + \mu(t) M_H^2 \det(\overset{\circ}{\phi}_{,i,k})}, \\ &= \frac{(1 + \mu(t)) \overset{\circ}{\delta}}{1 - \mu(t) \overset{\circ}{\delta}}, \quad \mu(t) := \frac{1}{r^2} [(r-1)^2 - 2r(r-1)] \end{aligned} \quad (67e)$$

$$\text{mit: } \overset{\circ}{\delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} Z - 1 \right) = \overset{\circ}{\delta}(\alpha, \beta) = \frac{-(\omega_{,\alpha} \omega_{,\beta} - \omega_{,\alpha,\beta}^2)}{1 + (\omega_{,\alpha} \omega_{,\beta} - \omega_{,\alpha,\beta}^2)}.$$

Dabei erfüllt ω die Laplacegleichung (66g). (Die Figur 8c veranschaulicht die Zeitabhängigkeit des Dichtekontrasts für die Lösung (67)).

Um den Dichtekontrast im “Eulerschen Raum” zu bekommen, müssen wir zunächst (67e) vermöge (66f) für bestimmte ω in den “Lagrange-Raum” transformieren und dann vermöge (67a,b) durch Eulersche Koordinaten $x_i = f_i(\vec{X}, t)$ ausdrücken. Obwohl die Wahlfreiheit der Anfangsbedingungen vergleichbar ist mit der der vorigen Klasse, ist die Bestimmung von regulären Anfangsbedingungen noch problematischer: Die Anfangsverteilung der Dichtekontraste ist singulär an Orten, wo die Transformation (66h) singulär ist. Für eine einfache Wahl der Lösung von (66g), z.B. $\omega = \alpha\beta$ oder $\omega = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)$, existiert die Funktion δ sogar im ganzen Raum nicht. Die triviale Anfangsbedingung $\delta = D = \text{const.}$ läßt sich durch $\omega = \frac{D}{2}(\alpha^2 - \beta^2)$, $\frac{D^2}{(1-D^2)} = C$ erzeugen. Nicht-triviale Anfangsbedingungen haben die Form:

$$\overset{\circ}{\delta} = \frac{4\tau_1''\tau_2''}{1 - 4\tau_1''\tau_2''}, \quad (67f)$$

wobei $\omega = \tau_1(\alpha + i\beta) + \tau_2(\alpha - i\beta)$ die allgemeine Lösung von (66g) ist. (Der Strich notiert die Ableitung nach dem Argument). (67f) wird i.A. singulär an Orten, für die $4w_1''w_2'' = 1$ gilt. Ein Beispiel einer singulären Verteilung sei noch angegeben: Wir wählen $\omega = \frac{1}{2} \ln(\alpha^2 + \beta^2)$ und erhalten:

$$\overset{\circ}{\delta} = \overset{\circ}{\delta}(X, Y) = \frac{1}{\sigma^2 - 1}; \quad \sigma^2 := \frac{1}{2} \left(\gamma^2 \pm \gamma \sqrt{\gamma^2 - 4} \right) - 1 \quad (67g)$$

mit $\gamma(X, Y) := X^2 + Y^2$.

Diese Verteilung wird auf dem Kreis mit Radius $\sqrt{2}$ singulär; innerhalb des Kreises ist sie nicht reell. Außerhalb des Kreises fällt sie ab, die Dichte fällt im Unendlichen überall auf den homogenen Wert. (Beachte, daß die Symmetrie der Verteilungen i.A. bei der Entwicklung im "Eulerschen Raum" nicht erhalten bleibt, (vgl. das Beispiel der vorher diskutierten Klasse).

- *Bemerkungen zum Fall einer raumabhängigen Funktion $M = M(X_1, X_2)$:*

Läßt man die Voraussetzung $M = \text{const.}$ fallen, so müssen M und die Gravitationsfeldstärke $\vec{G}$ zur Zeit $t = 0$ die Bedingungen (62) erfüllen. Die in III.1.3. diskutierte hinreichende Einschränkung der Wahl von M (Gleichung (57b)) löst die Bedingungen (62d und e). Um die Bedingung der Verträglichkeit mit (62a-c) zu prüfen, machen wir jedoch den allgemeineren Ansatz:

$$M_{,2} = \Delta_1 - \frac{G_1}{M}; \quad -M_{,1} = \Delta_2 - \frac{G_2}{M}, \quad (\text{vgl. 62e}). \quad (68a)$$

Mit (68a) erweist sich (62d) als Integrabilitätsbedingung für das so definierte M :

$$M_{,2,1} - M_{,1,2} = \Delta_{1,1} + \Delta_{2,2} - \frac{G_{1,1} + G_{2,2}}{M} + \frac{G_1 M_{,1} + G_2 M_{,2}}{M^2} \\ = 0 \text{ für (62d);} \quad (68b)$$

(wir notieren: $\Delta_{1,1} + \Delta_{2,2} = \nabla_0 \cdot \vec{\Delta} = 2 \det(G_{i,k})$).

Die Funktion M ist aber als solche nur eindeutig durch (68a) definiert, falls:

$$\frac{G_1}{\Delta_1 - M_{,2}} = \frac{G_2}{\Delta_2 + M_{,1}}.$$

Für das Gravitationspotential $\overset{\circ}{\Phi}$ (vgl. (62a)) lautet diese Bedingung:

$$\overset{\circ}{\Phi}_{,1} \overset{\circ}{\Phi}_{,2} (\overset{\circ}{\Phi}_{,2,2} - \overset{\circ}{\Phi}_{,1,2}) - \overset{\circ}{\Phi}_{,1,2} (\overset{\circ}{\Phi}_{,2,2} - \overset{\circ}{\Phi}_{,1,2}) = \overset{\circ}{\Phi}_{,1} M_{,1} + \overset{\circ}{\Phi}_{,2} M_{,2}. \quad (69a)$$

Wir bemerken, daß die hinreichende Bedingung (57b) das Verschwinden des Terms links des Gleichheitszeichens von (69a) impliziert.

Für Lösungen des Euler-Poisson-Systems müssen wir noch (62b, c) berücksichtigen. (62b) besagt, daß die Funktion M funktional von $\overset{\circ}{\Phi}$ abhängen muß; (62c) lautet für $\overset{\circ}{\Phi}$:

$$M = f(\overset{\circ}{\Phi}), \quad (69b)$$

$$M_{,2}(\overset{\circ}{\Phi}_{,1}\overset{\circ}{\Phi}_{,1,1} + \overset{\circ}{\Phi}_{,2}\overset{\circ}{\Phi}_{,2,1}) - M_{,1}(\overset{\circ}{\Phi}_{,1}\overset{\circ}{\Phi}_{,1,2} + \overset{\circ}{\Phi}_{,2}\overset{\circ}{\Phi}_{,2,2}) = 0. \quad (69c)$$

Mit (69c) erhalten wir schließlich zwei Gleichungen an $\overset{\circ}{\Phi}$:

$$\overset{\circ}{\Phi}_{,1}\overset{\circ}{\Phi}_{,2}(\overset{\circ}{\Phi}_{,2,2} - \overset{\circ}{\Phi}_{,1,1}) - \overset{\circ}{\Phi}_{,1,2}(\overset{\circ}{\Phi}_{,2}^2 - \overset{\circ}{\Phi}_{,1}^2) = f'(\Phi)(\overset{\circ}{\Phi}_{,1}^2 + \overset{\circ}{\Phi}_{,2}^2); \quad (70a),$$

$$\overset{\circ}{\Phi}_{,1}\overset{\circ}{\Phi}_{,2}(\overset{\circ}{\Phi}_{,2,2} - \overset{\circ}{\Phi}_{,1,1}) - \overset{\circ}{\Phi}_{,1,2}(\overset{\circ}{\Phi}_{,2}^2 - \overset{\circ}{\Phi}_{,1}^2) = 0. \quad (70b)$$

Für nicht-verschwindende Feldstärkebeträge $\overset{\circ}{\Phi}_{,1}^2 + \overset{\circ}{\Phi}_{,2}^2 \neq 0$ sind (70a und b) verträglich für:

$$f'(\Phi) = 0, \text{ d.h., } M = \text{const}. \quad (71)$$

Umgekehrt können wir bereits aus (70b) folgern, daß die hinreichende Einschränkung (57b), die mit der notwendigen Einschränkung aus $R = 0$ äquivalent ist, bereits genügt, um die Verträglichkeit *aller* Bedingungen für $M = \frac{G_i}{\Delta_i}$, $i = 1, 2$, zu beweisen. Die Einschränkung (70b) legt die zulässigen Potentiale $\overset{\circ}{\Phi}$ fest. Setzt man diese Bedingung in (69a) ein, so zeigt sich, daß das Verschwinden von (70b) mit der Gültigkeit der Gleichung (66a) äquivalent ist, welche sich als notwendige Bedingung aus der Forderung $M = \text{const}$ ableiten ließ.

Die gemachten Einschränkungen sind damit nur für die bereits diskutierten Klassen verträglich. Die Gleichung (69a) zeigt jedoch, daß man durchaus "selbstkonsistente" Ansätze konstruieren kann, die nicht Lösungen des Euler-Poisson-Systems sind, (vgl. dazu II.7.). Der Grund dafür ist, daß in höheren Dimensionen, die Integrabilitätsbedingung (36a) nicht-triviale Einschränkungen liefert, während das "Selbstkonsistenz-Kriterium" nur die Quellgleichung (36b) berücksichtigt. In einer Dimension ist dieses Kriterium jedoch hinreichend für die Bestimmung von Lösungen.

Wir haben gesehen, daß wir mit drei einschränkenden Annahmen (Zweidimensionalität, Existenz einer vektoriellen Erhaltungsgröße, spezieller Lösungsansatz mit identischer Zeitabhängigkeit der Komponenten der Integralkurven auf dem "Lagrange-Raum") Lösungsklassen des Euler-Poisson-Systems konstruieren konnten, ohne a priori Symmetrien zu postulieren. Die Verwendung der Lagrange-Methode hat sich dafür als geeignet erwiesen, insbesondere wenn man daran denkt, daß z.B. divergenzfreie Felder oder Felder mit Symmetrien auf dem "Lagrange-Raum" im "Eulerschen Raum" ein allgemeineres Verhalten zeigen. Die Untersuchungen dieser Arbeit und insbesondere dieses Kapitels zeigen, daß die Meinung der nicht praktikablen Anwendbarkeit der Lagrange-Methode für komplizierte Gleichungen in höheren Dimensionen revidiert werden muß; es sind im Gegenteil Möglichkeiten sichtbar, die erhaltenen Einsichten zu verallgemeinern.

Betrachtet man die Allgemeinheit der durch die Integrationsmethode (vgl. III.1.1.) definierten Klasse, so führte uns die Auswertung auf Bedingungen, die diese Allgemeinheit nicht ausschöpfen. Dies ist auf die gemachte "dritte einschränkende Bedingung" zurückzuführen. Weitere Einblicke in die Geometrie der Gleichungen könnten zur Aufhebung dieser einschränkenden Forderung führen. Obwohl die vorgestellten Klassen in diesem Sinn starken Einschränkungen unterliegen, können wir die anfängliche Fragestellung dennoch in einem beschränkten Rahmen aufgreifen. Die Frage nach dem Einfluß einer nicht-verschwindenden Gaußkrümmung der Störpotentialflächen auf die zeitliche und räumliche Entwicklung sowie die Frage nach der asymptotischen Stabilität der "kinematischen Approximation" können im Rahmen der speziellen Klassen beantwortet werden: Dazu untersuchen wir das Verhalten der Eigenwerte des Expansionstensors im "Eulerschen Raum". (Dieser ist wegen der Wirbelfreiheit von $\vec{v}$ in allen Fällen identisch mit dem Geschwindigkeitsgradienten $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$). Für die erste Klasse (mit nicht-trivialem Geschwindigkeitsfeld auf dem Hintergrund) erhalten wir folgende Eigenwerte (vgl. (64), (65)):

$$\epsilon_{1,2}(\vec{x}, t) = \frac{1}{J} [\dot{r}r + II(\vec{s})t \pm \sqrt{(\dot{r}r + II(\vec{s})t)^2 - II(\vec{s})J}]; \tag{72a}$$

$$J := \det(f_{i,k}) = r^2 + II(\vec{s})t^2 = r^2(1 + II(\vec{s})\lambda).$$

Für die zweite Klasse (mit nicht-trivialer Dichteverteilung auf dem Hintergrund) erhalten

wir zunächst für die Invarianten des Expansionstensors:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= \frac{\dot{r}}{J}[(2 - M_H I(\overset{\circ}{S})) + 2r(1 - M_H(\overset{\circ}{S}) + M_H^2 II(\overset{\circ}{S}))], \\ \det\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) &= \frac{\dot{r}^2}{J}[1 - M_H I(\overset{\circ}{S}) + M_H^2 II(\overset{\circ}{S})],\end{aligned}$$

und schließlich für seine Eigenwerte (vgl. (66), (67)):

$$\begin{aligned}\nu_{1,2} &= \frac{\dot{r}}{J} \left[(1+r)(1+\overset{\circ}{\delta}) \pm \sqrt{(1+r)^2(1+\overset{\circ}{\delta})^2 - (1+\overset{\circ}{\delta})J} \right]; \\ J &:= \det(f_{i,k}) = r^2 - ((r-1)^2 - 2r(r-1))\overset{\circ}{\delta} = r^2(1 - \mu(t)\overset{\circ}{\delta}).\end{aligned}\tag{72b}$$

Die römischen Ziffern bezeichnen Invarianten des Tensors der zweiten Ableitungen der in Klammern gesetzten Funktion, $I(\omega) = \text{Spur}(\omega_{,i,k})$, $II(\omega) = \det(\omega_{,i,k})$.

Wir lesen aus (72) ab, daß jeweils für große Zeiten die Eigenwerte das folgende asymptotische Verhalten haben:

$$\epsilon_1 \rightarrow \frac{1}{J}[2\dot{r}r + 2II(\overset{\circ}{s})t]; \quad \epsilon_2 \rightarrow 0.\tag{73a}$$

$$\nu_1 \rightarrow \frac{1}{J}[2\dot{r}(1+r)(1+\overset{\circ}{\delta})]; \quad \nu_2 \rightarrow 0.\tag{73b}$$

D.h., für große Zeiten dominiert ein Eigenwert die lokale Kontraktion, die durch die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes bestimmt ist. Die Gaußsche Krümmung der Potentialflächen spielt offenbar in diesen Klassen keine Rolle für hinreichend große Zeiten. Die Bewegung der Flüssigkeit ist somit lokal praktisch eindimensional vor der Entartung der Volumenelemente zu Elementen der Kaustik. Damit bestätigen diese Lösungen das Standard-Bild des stark anisotropen Kollaps. Wir geben noch zur Unterstützung der Aussage, daß der Kollaps stark anisotrop verläuft, jeweils den Scherungsskalar σ an:

$$\sigma_\epsilon := \frac{1}{4}(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2) = \frac{1}{J^2}[(\dot{r}r + II(\overset{\circ}{s})t)^2 - \frac{1}{2}II(\overset{\circ}{s})J];\tag{74a}$$

$$\sigma_\nu := \frac{1}{4}(\nu_1^2 + \nu_2^2) = \frac{1}{J^2}[\dot{r}^2(1+r)^2(1+\overset{\circ}{\delta})^2].\tag{74b}$$

Der für hinreichend große Zeiten dominierende Effekt der Verstärkung der Anisotropie ist in J^{-2} enthalten, vgl. die Determinanten in (72a und b). Die Lösungen bestätigen die Erwartung, daß ein stark anisotroper Kollaps auch für inhomogene Staublösungen

des Euler-Poisson-Systems generisch ist, was bislang nur für homogene Lösungen gezeigt wurde (vgl. die Literaturnachweise in I.). Man kann im Hinblick auf den Einfluß der Gaußkrümmung keine Änderung dieses Verhaltens feststellen. Ich möchte dieses Ergebnis aber nicht als starkes Argument für die "kinematische Approximation" werten. Die Begründung ist, daß die diskutierten Lösungen die Eigenschaft der *Separation* der Lösung (z.B. für die Feldstärke) in Funktionen von Lagrange-Koordinaten (Anfangsbedingungen) und zeitabhängigen Funktionen haben. Die Integrationsmethode (III.1.1.) gibt aber einen starken Hinweis dafür, daß i.A. die Lösung nicht in diesem Sinn separiert. Die diskutierten Lösungen bestätigen möglicherweise das Standard-Bild nur, weil die prinzipielle Form der Lösung mit der "kinematischen Approximation" vergleichbar ist; (z.B. die nicht-triviale Geschwindigkeitsverteilung auf dem anfänglich homogenen Hintergrund entspricht genau, sieht man von der Zweidimensionalität des Hintergrunds ab, der Struktur der Standard-Approximation).

Die dargestellten Lösungen erlauben zwar *zwei* nichtverschwindende Eigenfunktionen und entsprechen daher einem allgemeineren Verhalten im Vergleich zu den Lösungen des Kapitels II und des Appendix B, sie besitzen aber keine prinzipiell andere Gestalt. Separiert die Lösung auf dem "Lagrange-Raum" nicht, so entsteht eine zusätzliche, qualitativ neue Raumabhängigkeit, deren Folgen insbesondere für das in I.3. hervorgehobene *Fragmentierungsproblem* entscheidenden Aufschluß geben könnten.

Wir wollen abschließend zusammenfassen, was man aus den Untersuchungen dieses Abschnitts auch für die unbekannte allgemeine Lösung des Problems lernen kann:

1. Die vorgestellten Lösungen haben eine wichtige Eigenschaft, die man auch für die allgemeine Lösung erwartet, sie enthalten *homogene* Lösungen. (Wegen der gemachten Einschränkung sind diese *isotrop*).
2. Die Lösungen lassen sich *additiv* aus Hintergrundlösung und inhomogener Deformation zusammensetzen. Diese Form ergab sich ohne einen entsprechenden a priori-Ansatz, (vgl. die Lösungen des Kapitels II, für die diese Additivität gefordert wurde). Dieses Resultat liefert damit eine gewisse Rechtfertigung dafür, daß auch Lösungen des nichtlinearen Problems diese Additivität besitzen, die im Rahmen der linearen Theorie auftritt.
3. Die Lösungen zeigen ein stark anisotropes Kollapsverhalten. Dieses unterscheidet

sich in der Endphase des Kollaps nicht wesentlich von einer lokal eindimensionalen Bewegung (Bestätigung des Standard-Bildes).

4. Der Punkt 3. gilt für die vorgestellten Lösungen. Dieses Resultat relativierten wir im Hinblick auf ein allgemeineres Verhalten des Staubmediums im Fall nicht auf dem "Lagrange-Raum" nach Raum und Zeit *separierender* Lösungen. Besonders bzgl. *räumlicher* Strukturbildungsdetails erwarten wir einen qualitativen Unterschied im Vergleich zu Lösungen, die prinzipielle Formähnlichkeit mit der Standard-Approximation besitzen. Man kann vermuten, daß diese qualitativ neuen Aspekte einer allgemeineren Lösung Aufschluß über die Möglichkeit einer *Fragmentierung* aufgrund von Selbstgravitation geben würden.

III.2. Bemerkungen zur Anwendung der Theorie der Lagrange-Singularitäten auf approximative Szenarien der Galaxienentstehung

Wie in I.4. dargestellt, wird Zel'dovichs' Ansatz als formale Abwandlung der Bewegungsgleichung eines kräftefreien Kontinuums verstanden. Die Familie von Abbildungen (vgl. die formale Identifizierung mit der Zel'dovich-Approximation (E1)):

$$\begin{aligned}\pi_t^{(1)} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{X} &\mapsto \vec{x} = \vec{f}^{(1)}(\vec{X}; t) = \vec{X} + t\vec{V}(X)\end{aligned}\tag{75}$$

ist eine einparametrische Familie von *Lagrange-Abbildungen*, falls $\vec{v} = \nabla_X S$, d.h., falls die Abbildung vom "Lagrangeschen" in den "Eulerschen Raum" für alle Parameterwerte von t eine Gradientenabbildung ist (Gradientenabbildungen sind Beispiele von Lagrange-Abbildungen, vgl. Arnol'd et al. 1982a, Arnol'd 1972, §10). Dann ist für alle t die (nicht ausgeartete) 2-Form $\sum_i (dx_i \wedge dX^i)$ die O-Form auf der so definierten Lagrange-Mannigfaltigkeit (x_i und X^i sind für die Bewegungsgleichung des kräftefreien Kontinuums geeignete lokale Koordinaten auf dieser Mannigfaltigkeit); man beachte, daß der Gradient bezügl. Lagrangescher Koordinaten gebildet wird. Die Singularitäten dieser Abbildungen sind sog. Lagrange-Singularitäten und korrespondieren Singularitäten in der Dichte über die Kontinuitätsgleichung:

$$\rho \propto (\det(f_{i,k}^{(1)}))^{-1} \rightarrow \infty \tag{76a}$$

für Parameterwerte t_c , wo die symmetrische Matrix $(S_{i,k})$ singulär ist im Punkt $\vec{X}_c$:

$$\det(S_{i,k} - \lambda \delta_{i,k})|_{X_c, t_c} = 0; \lambda = -\frac{1}{t}. \tag{76b}$$

Obwohl die Familie von Abbildungen (75) über die Transformation des Zeitparameters (vgl. E10 ff) nur sehr spezielle selbstgravitierende Flüsse auf einem homogenen Hintergrund abbildet (dies ist das Resultat der Untersuchungen des Kapitels II), besteht der Allgemeinheitsanspruch, daß die spezielle Familie (75) lokal dieselben Eigenschaften der räumlichen Strukturen (d.h. der Bilder der kritischen Mengen der Lagrangemannigfaltigkeiten im "Eulerschen Raum", die Kaustik) besitzt wie die unbekannte allgemeine Abbildung des selbstgravitierenden Kontinuums auf sich (vgl. Arnol'd et al. 1982b). Diese

starke Aussage ist für das Verständnis von Strukturbildung im Universum, insbesondere durch die Attraktoreigenschaft der Kaustik im “dunkle Materie”-dominierten Szenarium, sehr wichtig. Sie ist wahr, wenn man beweisen kann, daß allgemeine selbstgravitierende Staubmedien Lagrange-Singularitäten besitzen. Man erwartet diese Eigenschaft durch die Existenz eines Potentials der (Newtonschen) Gravitationskräfte (vgl. Arnol'd 1983a, §6, Fußnote 1; Arnol'd 1984, Kap. 9), aber der Beweis ist noch nicht erfolgt. Dieser Mangel der Anwendung der Aussagen im Rahmen der Lagrange-Singularitäten-Theorie auf das Problem der Galaxienbildung wird als Kritikpunkt hier hervorgehoben; dieser Punkt wurde bislang in der Literatur noch nicht erwähnt; Arnol'd hat jedoch kürzlich Anstrengungen unternommen, diese Aussage zu beweisen. (S.F. Shandarin, priv. Komm.).

Eine mögliche partielle Beweismethode ist der explizite Nachweis der Lagrange-Eigenschaft bei speziellen Lösungsklassen. Dies kann die Behauptung der Allgemeingültigkeit zumindest stützen oder z.B. durch Angabe eines Gegenbeispiels falsifizieren.

Im folgenden wird die Lagrange-Eigenschaft der Abbildungsfamilien gezeigt, welche durch die Bewegungsgleichungen der in Kapitel II, Appendix B und Kapitel III.1. vorgestellten Lösungsklassen definiert werden. Es ergibt sich in allen Fällen eine Bestätigung der Anwendung der Singularitäten-Theorie für selbstgravitierende Flüsse.

In einer räumlichen Dimension, schließen wir aus der *allgemeinen* Lösung (25a, 10), daß die assoziierte Familie von Projektionsabbildungen des “Lagrangeschen” in den “Eulerschen Raum” die Lagrange-Eigenschaft besitzt, da sie für alle Werte von Z Gradienten definiert:

$$\begin{aligned}\pi_Z^{1D} : \mathbb{R}^1 &\rightarrow \mathbb{R}^1, X \mapsto q = \Psi_{,X}; \\ \Psi &= \frac{X^2}{2} + g^\alpha A(X) + g^\beta B(X), \alpha = A_{,X}, \beta = B_{,X}.\end{aligned}\tag{77a}$$

In einer räumlichen Dimension ist jedoch die Forderung, daß die Abbildungen Gradienten sein müssen, eine Tautologie. Ein nicht-triviales Beispiel einer Familie von 3D-Gradienten wird durch die spezielle Lösung (25a) definiert:

$$\begin{aligned}\pi_Z^{(2)} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3; \vec{X} \mapsto \vec{q} = \nabla_X \Psi; \\ \Psi &= \frac{|\vec{X}|^2}{2} + g^\alpha A(\vec{X}) + g^\beta B(\vec{X}), \vec{\alpha} = \nabla_X A, \vec{\beta} = \nabla_X B.\end{aligned}\tag{77b}$$

Auf der Grundlage der obigen Betrachtungen schreiben wir nun eine allgemeine Bewegungsgleichung auf, die Familien von Lagrange-Abbildungen im Rahmen von Bewegungen

relativ zur isotropen Expansion des Hintergrunds definiert:

$$\begin{aligned}\vec{q} &= \vec{F}(\vec{X}, Z) = \vec{X} + \int \frac{\vec{u}(\vec{X}, Z)}{a(Z)} dZ = \nabla_X \Psi; \vec{F}(\vec{X}, Z_0) =: \vec{X}. \\ \vec{\Psi} &:= \frac{|\vec{X}|^2}{2} + \int \frac{1}{a(Z)} s(\vec{X}, Z) dZ; \quad \vec{u} = \nabla_X s.\end{aligned}\tag{78}$$

Der Parameter Z dieser Lagrange-Abbildungen muß nicht wie in den Beispielen zuvor von der Funktion $\vec{u}(\vec{X})$ separiert werden können (Es interessiert für den Charakter der Abbildung und deren Singularitäten nur die Gradienteneigenschaft bei festgehaltenem Z). Die Darstellung (78) ist nur möglich, falls die Integralkurven der Pekuliarbewegung $\vec{F}$ ein wirbelfreies Vektorfeld im “Lagrange-Raum” definieren:

$$\nabla_X \times \vec{F} = 0, \quad d.h. \quad \vec{U} =: \nabla_X s.\tag{79}$$

Wirbelfreiheit von $\vec{u}$ bezügl. Lagrangescher Koordinaten impliziert Wirbelfreiheit zur Zeit $Z = Z_0$, was wiederum vermöge eines Theorems von Cauchy und Lagrange (Gleichung (85b)) garantiert, daß die Wirbelfreiheit von $\vec{u}$ im “Eulerschen Raum” für alle Z bis zum Auftreten der Singularität folgt, falls das Beschleunigungsfeld durch ein konservatives Kraftfeld (der Pekuliarfeldstärke $\vec{w}$ und z.B. eines barotropen Druckes) erzeugt wird.

Dies ist die triviale Richtung der Beweisführung. Um allgemeine selbstgravitierende Flüsse in der Form (78) darstellen zu können, müssen wir zeigen, daß aus der Annahme der Wirbelfreiheit von $\vec{u}$ zur Zeit $Z = Z_0$ die Wirbelfreiheit von $\vec{u}$ im “Lagrange-Raum” unter Verwendung der Grundgleichungen, die in der für diese Problemstellung geeigneten Gestalt (17) bzw. (8) dargestellt wurden, folgt.

Dies ist nur *eine* mögliche Skizze der Beweisführung. Die Forderung (79) ist eine *hinreichende* Bedingung dafür, daß der durch die Integralkurven $\vec{F}$ definierte Fluß Lagrange-Singularitäten besitzt. Ich demonstriere im folgenden, daß die nicht-triviale Schlußfolgerung i.A. nicht möglich ist. Wir repräsentieren dazu das Wirbelfeld $\nabla_q \times \vec{u}$ in der Lagrange-Darstellung:

$$\begin{aligned}\nabla_q \times \vec{u} &= \frac{1}{2} \epsilon_{mn|j} \frac{\partial(u_i, F_m, F_n)}{\partial(X_i, X_m, X_n)} \cdot J^{-1}; \\ &= \frac{\nabla_X \times \vec{u}}{J} + \frac{K}{J}; \quad J := \|F_{i,k}\|.\end{aligned}\tag{80}$$

mit

$$K := \frac{1}{2} \epsilon_{mnj} \frac{\partial(u_{[j}, X_m, \int u_n dZ)}{\partial(X_i, X_m, X_n)} + \frac{\partial(u_{[j}, \int u_m dZ, X_n)}{\partial(X_i, X_m, X_n)} + \frac{\partial(u_{[j}, \int u_m dZ, \int u_n dZ)}{\partial(X_i, X_m, X_n)}.$$

Wir können bereits zwei Beispiele angeben, für die die Implikation $\nabla_q \times \vec{u}(\vec{q}, t) = 0 \Rightarrow \nabla_X \times \vec{u}(\vec{X}, t) = 0$ möglich ist. Es zeigt sich für die Lösungskurven (77b) und für das Beispiel von Arnol'd (75), (das sogar ein Beispiel für eine *allgemeine* Lösung ist, die diese Eigenschaft besitzt), daß der Term K in (80) genau dann verschwindet, wenn die Lösungskurven bezüglich Lagrangescher Koordinaten und des Parameters Z *separierbar* sind:

Betrachten wir z.B. die Abbildungen (77b) für das Pekuliargeschwindigkeitsfeld $\vec{u}$:

$$\vec{u}(\vec{X}, Z) = \lambda(Z)\vec{U}(\vec{X}) + \eta(Z)\vec{W}(\vec{X});$$

dann ist

$$\begin{aligned} \nabla_X \times \vec{u} &= \lambda(Z)(\nabla_X \times \vec{U}) + \eta(Z)(\nabla_X \times \vec{W}) \\ &= \lambda(Z)(\nabla_q \times \vec{u}|_{Z=Z_0}) + \eta(Z)(\nabla_q \times \vec{w}|_{Z=Z_0}), \end{aligned}$$

d.h. $\nabla_q \times \vec{u}|_{Z=Z_0}$ impliziert $\nabla_X \times \vec{u} = 0$ (da $\nabla_q \times \vec{w}|_{Z=Z_0} = 0$); Dieselben Überlegungen gelten für Arnol'ds' Beispiel und für die Lösungskurven der in Appendix B vorgestellten Klasse, die man bei geeigneter Parameterwahl auch formal als Unterklasse der Abbildungen (77b) auffassen kann. Man beachte, daß wir bei der Separationsforderung keinen Gebrauch von den Grundgleichungen gemacht haben. Die Lösungen des Kapitels III.1. sind weitere Beispiele für separierbare Lösungen. Sie lassen sich in der Form (78) schreiben, wenn man entsprechend mit dem zweidimensionalen Hintergrund "mitschwimmende Koordinaten" einführt, (vgl III.1.4.).

Wir können als Folge dieser Überlegungen den folgenden Satz formulieren:

Vorraussetzung: Wir betrachten Lösungen eines Differentialgleichungssystems, welche wir durch Integralkurven $\vec{q} = \vec{F}(\vec{X}, Z)$ eines Geschwindigkeitsfeldes $\vec{u}(\vec{q}, Z)$ darstellen können. *Separierbar* nennen wir solche Lösungen, deren Integralkurven sich in der Form $\vec{F} = \vec{X} + \sum_i \vec{\alpha}_i(\vec{X})g_i(Z)$ schreiben lassen.

Satz:

Lösungen, die sich durch separierbare Integralkurven darstellen lassen, definieren einparametrische Familien von Lagrange-Abbildungen: $\pi_Z : \vec{q} \mapsto \nabla_X \Psi$, falls $\vec{\alpha}_i = \nabla_X A_i(\vec{X})$.

(Diese Aussage läßt sich auch auf j-parametrische Familien verallgemeinern).

Der Beweis folgt aus (78), (79) und (80); die Integrale $\int u_i dZ$ in (80) können bei Separation in X_i und Z direkt ausgewertet werden, was zum Verschwinden der Determinanten in (80) führt. Wir verbleiben mit Termen proportional zu Anfangswirbelfeldern (z.B. von $\vec{u}$ und $\vec{w}$ im Beispiel der Abbildung (77b)), die nach Voraussetzung identisch verschwinden.

Alle Lösungsklassen dieser Arbeit haben damit die Eigenschaft, Familien von Lagrange-Abbildungen zu definieren. Wir haben außerdem gezeigt, daß die *Separationseigenschaft* der Lösungen auf dem "Lagrange-Raum" bereits ohne Bezug auf die Feldgleichungen dafür hinreichend ist, daß für konservative Kräfte im Rahmen der Kontinuumsmechanik die assoziierten Abbildungsfamilien Lagrange-Singularitäten besitzen. Wir wollen an dieser Stelle noch an die Diskussion des Abschnitts III.1. erinnern. Dort haben wir die Erwartung begründet, daß allgemeine selbstgravitierende Flüsse die Separationseigenschaft voraussichtlich nicht besitzen. Wir haben aber als eine hinreichende einschränkende Bedingung der durch die Integrationsmethode (III.1.1.) definierten Klasse die Wirbelfreiheit der Integralkurven auf dem "Lagrange-Raum" aus der Integrabilitätsbedingung des Gravitationsfeldes gefolgert (Gleichungen (53)). Dies ist ein weiteres Argument dafür, daß, (zumindest für zweidimensionale Lösungen einer verhältnismäßig allgemeinen Klasse), Lösungen des Euler-Poisson-Systems vermöge der Integrabilitätsbedingung des Gravitationsfeldes Lagrange-Singularitäten besitzen.

Anmerkung:

In der mathematischen Literatur ist eine Arbeit von J. Guckenheimer (1973) interessant, in der ein Formalismus dargestellt ist, welcher das Konzept der Lagrange-Singularitäten von Abbildungen auf Lösungen partieller Differentialgleichungen (erster

Ordnung) überträgt. Guckenheimer gründet diese Übertragung auf sog. "Hörmandersche Erzeugendenfamilien" von Lagrangemannigfaltigkeiten. Ich kann zeigen, daß die von Shandarin in dem Artikel von Arnol'd et al. (1982) hergeleiteten Normalformen, (diese Herleitung nimmt nicht explizit Bezug auf die mathematische Klassifikation, es werden Techniken verwendet, die im Rahmen der Theorie entwickelt wurden), ebenfalls "Hörmanderschen Erzeugendenfamilien" korrespondieren, (vgl. Hörmander 1971, sec.III.). Die Darstellung von Shandarin ist singulär, sie ist aber für die Darstellung von Strukturen, die sich auf die Entwicklung von Spektren im "Eulerschen Raum" beziehen handlicher. Ich habe damit begonnen, Anfangsbedingungen regulär darzustellen, um den Bezug zur mathematischen Beschreibung herzustellen. Eine solche Darstellung wird wichtig, wenn man sich explizit auf Resultate der Singularitätentheorie beziehen will. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß die *generischen* Strukturen im Rahmen der Arnol'dschen Klassifikation mit den "Realstrukturen", die als Folge der Entwicklung von Fourierspektren (mit Gaußscher Verteilung der Amplituden) auftreten, i.A. bezüglich ihres Aussehens nicht übereinstimmen. Diese morphologischen Aspekte spielen (bei identischer lokaler Struktur) im kosmologischen Kontext, denkt man z.B. an Beobachtungen, eine Rolle. Die Möglichkeit der Darstellung der Metamorphosen von Singularitäten, eingebettet in globale Strukturen, wie sie in II.1.8. durchgeführt wurden, eröffnen eine systematische Behandlung dieser Frage auch z.B. in einem statistischen Sinn, (z.B. Untersuchungen zur Häufigkeit des Auftretens bestimmter Typen), vgl. "Ausblick auf weiterführende Arbeiten".

III.3. Bemerkungen zur nichtlinearen Entwicklung von Rotationsstörungen

Der Lagrange-Charakter der Singularitäten wird z.B. auch aufgehoben, wenn das Geschwindigkeitsfeld nicht wirbelfrei ist. Eine Erweiterung der Theorie der Lagrange-Singularitäten für solenoidale Geschwindigkeitsfelder wurde kürzlich von Bruce und Mitarbeitern betrachtet (vgl. Bruce 1986). Bruce und seine Mitarbeiter zeigen, daß die am häufigsten vorkommenden PANCAKE-Singularitäten (vgl. I.5.) wiederum stabil sind. Jedoch, so vermute ich, wird die Anwesenheit starker Wirbel im Geschwindigkeitsfeld das Bild zumindest quantitativ ändern. Selbst die Vermeidung von Singularitäten durch Ausbildung von Rotations-Gravitations-Gleichgewichtskonfigurationen ist denkbar. Die Arbeit von Bruce (1986) zeigt, daß auch qualitative Änderungen durch einen neuen Singularitätentypus, der eine Form der Lagrangeschen Singularitäten ersetzt, zu erwarten sind, falls die Kaustikbildung in der für Potentialströmungen erwarteten Weise nach endlicher Zeit stattfindet.

Alternative Szenarien der Galaxienbildung sind betrachtet worden, die sich jedoch auf die Annahme von starken Wirbeln im primordialen Spektrum gründen, die sich nicht in der Hintergrundstrahlung nachweisen lassen. Man kann sich Szenarien vorstellen, die auch Rotation des Geschwindigkeitsfeldes berücksichtigen und nur geringe Rotationsstörungen im primordialen Spektrum voraussetzen. Ein solches Szenarium kann man nicht im Rahmen der Lösungskurven (25) diskutieren, zum einen schließen die Lösungen rotierende Flüsse aus, zum anderen zeigt die approximative Verwendung gemäß einer von mir durchgeführten Untersuchung für die Entwicklung von Rotationsstörungen keine nennenswerten Abweichungen vom Verhalten des Potential-Szenariums. Ich will nun im folgenden zeigen, daß es sehr wichtig ist, rotierende selbstgravitierende Flüsse im "nichtlinearen Regime" der Galaxienbildung zu studieren: Die Voraussage der linearen Theorie, daß Rotationsstörungen im Verlauf der Entwicklung aussterben und keine Konsequenz für das nichtlineare Stadium der Galaxienbildung haben ist *falsch*: Die nichtlineare Kopplung von Rotation des Geschwindigkeitsfeldes und Dichtewachstum impliziert sogar ein singuläres Verhalten des rotierenden Anteils der Geschwindigkeit auf Flächen unendlicher Dichte (z.B. die Begrenzungsflächen von PANCAKES) für generische Anfangsdaten, vorausgesetzt, man läßt (beliebig kleine!) Rotationsstörungen als Anfangsbedingungen nach der Rekombinationsphase zu.

Um dies zu zeigen, betrachten wir Theoreme aus der Hydrodynamik, verallgemeinert für die Entwicklung der Rotation des Pekuliargeschwindigkeitsfeldes relativ zu einem isotrop expandierenden Hintergrund; (beachte: $\vec{\omega} := \nabla \times \vec{v} = \frac{1}{a} \nabla_q \times \vec{u}$, da der Hubblefluß als wirbelfrei vorausgesetzt wird):

Wir betrachten zunächst das Integral der Eulergleichung (13a):

$$\vec{u} = \frac{1}{a} (\overset{\circ}{\vec{u}}(\vec{X}) + \int_{t_0}^t a \vec{\omega}(\vec{X}, t) dt). \quad (81)$$

Wendet man den Operator $\frac{1}{a} \nabla_q \times$ auf diese Gleichung an, so erhalten wir:

$$\vec{\omega} = \frac{\overset{\circ}{\vec{\omega}}(\vec{X})}{a} + \frac{1}{a} \nabla_q \times \int_{t_0}^t a \vec{\omega}(\vec{X}, t) dt. \quad (82)$$

Entsprechend erhalten wir in differentieller Form die folgende Entwicklungsgleichung für die Rotation (hergeleitet aus $0 = \nabla_q \times \vec{w} = \nabla_q \times (\vec{u} + H\vec{u})$):

$$\dot{\vec{\omega}} + H\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla_q) \frac{\vec{u}}{a} - \vec{\omega} (\nabla_q \cdot \frac{\vec{u}}{a}) \quad (83)$$

$$\dot{\vec{\omega}} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{v}). \quad (83^*)$$

Die Gleichungen zeigen, daß die Expansion des Hintergrunds die Rotation mit der Rate $\frac{1}{a}$ in der Zeit abschwächt, was auch mit der Aussage der entsprechenden linearisierten Gleichung, die in der Literatur häufig zitiert wird, übereinstimmt:

$$\vec{\omega}_t^L + H\vec{\omega}_L = 0; \quad \vec{\omega}^L = \frac{\overset{\circ}{\vec{\omega}}(\vec{X})}{a}. \quad (83)^L$$

In der linearisierten Theorie entkoppelt die Entwicklung der Rotation von der Entwicklung der Dichtefluktuationen (der Operator $\nabla_q \times$ kommutiert mit dem Integral in (82)). Man denkt an kleine Abweichungen von der Homogenität in Frühstadien der Entwicklung von Dichteinhomogenitäten und schließt aus $(83)^L$, daß die Expansion die Rotationsstörungen wegämpft und diese deshalb keine Rolle für die weitere Entwicklung der Strukturen spielen. Dabei handelt es sich aber um ein lineares Stabilitätskriterium. In Wirklichkeit sind die Rotationsstörungen an das Dichtewachstum bereits in zweiter Näherung gekoppelt. Wenn man an gravitativ gebundene Systeme denkt, ist man mit dem Anwachsen der Rotation beim Materiekollaps vertraut (Drehimpulserhaltung). Der Standpunkt der

linearen Theorie ist hier irreführend: Abweichungen von der Homogenität werden groß, im Standard-Bild wächst der Dichtekontrast lokal sogar über alle Grenzen auf einer Kaustik und ist selbst auf der Skala von Superhaufen im Mittel nicht klein gegen 1, sondern ungefähr 2 bis 3.

Wir zeigen jetzt, daß für $\rho \rightarrow \infty$ auf einer Kaustik für "fast alle" Anfangsdaten auch $|\vec{\omega}| \rightarrow \infty$ in einer endlichen Zeit folgt, vorausgesetzt wir lassen beliebig kleine, aber endliche Rotationsstörungen als Anfangsbedingung zu. Wir betrachten ein der "Beltrami-Helmholtz-Gleichung" (Serrin, 1959, S.17) analoge Gleichung unter Einbeziehung der Expansion:

Mit Hilfe von (13b) berechnen wir die Größe $(1 + \delta) \left(\frac{\vec{\omega}}{1 + \delta} \right)' = \dot{\vec{\omega}} + \left(\frac{1}{a} \nabla_q \cdot \vec{u} \right) \vec{\omega}$ und erhalten mit (83) unter Verwendung von $\dot{\rho}_H + 3H\rho_H = 0$:

$$\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right)' - 2H \frac{\vec{\omega}}{\rho} = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla_q \right) \frac{\vec{u}}{a}, \quad (84)$$

$$\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right)' = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{v}. \quad (84*)$$

Diese Gleichungen, die auch gelten, wenn andere konservative Kräfte berücksichtigt werden (z.B. ein barotroper Druck), zeigen z.B. für ebene Flüsse, (bei denen $\vec{\omega}$ immer orthogonal zur Bewegungsebene ist ($\vec{\omega} \cdot \nabla_q \vec{u} = 0$), daß:

$$\frac{\vec{\omega}}{\rho} = a^2 \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right)^0 (\vec{X}), \quad (85a)$$

d.h. falls $\rho \rightarrow \infty$ auf einem Flüssigkeitspfad gilt, gilt auch $|\vec{\omega}| \rightarrow \infty$.

In drei räumlichen Dimensionen hängt die Entwicklung der Rotation nicht allein von der Dichte ab, sondern auch von Details der Bewegung. Wir betrachten das Analogon von Cauchy's Integral der Gleichung (84*) mit einem expandierenden Hintergrund:

$$\frac{\vec{\omega}}{\rho} = a^2 \left(\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right)^0 (\vec{X}) \cdot \nabla_X \right) \vec{F}(\vec{X}, t); \quad \det(F_{i,k}) \neq 0. \quad (85b)$$

($\vec{F}$ sind die in (15a) definierten Integralkurven). Aus (85b) schließen wir, daß das singuläre Verhalten von $|\vec{\omega}|$ auf einer Kaustik generisch ist; es gilt:

$$|\vec{\omega}| = a^2 \frac{\rho}{\rho^0} |(\vec{\omega}^0 \cdot \nabla_X)|_{(X_c, Z_c)} \rightarrow \infty \quad \text{falls} \quad \rho|_{(X_c, Z_c)} \rightarrow \infty$$

für fast alle kritischen Punkte $(X_c, Z_c) : (\vec{\omega} \cdot \nabla_{\vec{X}}) \vec{F}|_{(X_c, Z_c)} \neq 0$.

Wir schließen, daß für beliebig kleine, aber endliche Rotationsstörungen zu einer Zeit Z_0 (Rotverschiebung der Rekombinationszeit), die Rotation ungefähr proportional zum Dichtewachstum verstärkt und auf einer Kaustik unendlich groß wird. Dieses Verhalten ist nicht überraschend, aber entgegengesetzt zur Aussage der linearen Theorie und muß deshalb betont werden. Es drückt die Tatsache aus, daß gravitative Instabilität des homogenen Hintergrunds auch Instabilität bezüglich Rotationsstörungen impliziert, wenn auch letztere erst durch Berücksichtigung von Nichtlinearitäten auftritt. Unter den Voraussetzungen des Standard-Bildes, das auf der Kaustikbildung in nur gravitativ wechselwirkenden *Potentialströmungen* beruht, wird die Produktion von Wirbeln im Geschwindigkeitsfeld erst im Stadium der Ausbildung einer Stoßstruktur (bzw. Stoßfront in Materie mit Druck) erwartet (z.B. ist bekannt, daß Stoßfronten Rotation produzieren und so eine natürliche Erklärung für die Entstehung von Wirbeln liefern, vgl. Doroshkevich 1973). Die Überlegungen dieses Abschnitts zeigen aber, daß man sich darüber im Klaren sein muß, daß eine "fast" wirbelfreie Strömung im nichtlinearen Regime starke Wirbel produziert. Diese Rotation ist primordial, sie impliziert aber nicht die Problematik der Turbulenztheorien. Auch andere Rotationsmaße, welche die Deformation des Flusses respektieren und damit ein realistischeres Maß für die Rotation darstellen (vgl. Serrin 1959, §27) führen zum selben Resultat, da Deformationen i.A. endlich bleiben. Ich betrachte diese Diskussion als Ausgangspunkt für Untersuchungen von rotierenden Flüssen im Rahmen des PANCAKES-Szenariums. Selbst in bislang durchgeführten numerischen Simulationen in diesem Kontext wird der Effekt von Rotation nicht studiert. (vgl. "Ausblick auf weiterführende Arbeiten").

Ausblick auf weiterführende Arbeiten

Für die Kosmologie der Bildung supergalaktischer Strukturen von zentraler Bedeutung ist eine hinreichend genaue Beschreibung der *Spätstadien* der Strukturbildung, um den Zusammenhang zu beobachtbaren Objekten auch quantitativ herzustellen. Wir haben die Zellstrukturen kennengelernt, die sich bereits im "frühen nichtlinearen Regime" in der Materieverteilung ausbilden. Ich erinnere daran, daß die (per Annahme massebehafteten) Konstituenten der "dunklen Materie" (Neutrinos), durch ihre Dominanz als Attraktor für die baryonische Komponente der Materie (also auch für die beobachtbaren Strukturen) wirken und damit dieser die "Zell-Topologie" aufprägen. Wir wissen auch, daß diese Struktur im "frühen nichtlinearen Regime" erfolgreich durch analytische Modelle beschrieben werden kann (vgl. Kapitel II). Diese Modelle haben einen Nachteil, der bei der Anwendung auf Spätstadien der Entwicklung im Vergleich zu numerischen Simulationen offensichtlich ist, nämlich das zu schnelle Anwachsen der PANCAKE-"Dicke" nach dem Auftreten der ersten Singularitäten, (vgl. die Figuren 5 und 6), das auf Vernachlässigung von Selbstgravitation in den auftretenden Vielstromsystemen zurückführbar ist. Gurbatov et al. (1985), (vgl. auch Shandarin & Zel'dovich 1988, Gurbatov et al. 1988) schlagen ein Modell vor, das auf der dreidimensionalen *Burgers-Gleichung* (dessen Lösung bekannt ist) basiert. Eine kinematische Viskosität soll den Effekt von Selbstgravitation innerhalb PANCAKES simulieren. Das Modell ersetzt in *erster* Näherung das Durchdringen der "Teilchen" durch ein "sticking": die "Teilchen" haften aneinander und simulieren so den Zustand, um den die "Teilchen" unter dem Einfluß von Selbstgravitation oszillieren, (vgl. Fig.4k). Dieses Modell hat eine gute Chance auf beobachtungsrelevante Fragen anwendbar zu sein und behält dabei die Vorteile der analytischen Beschreibung (wie z.B. hohe räumliche Auflösung von Strukturen, verhältnismäßig geringer Rechenaufwand, u.s.f.). (Dazu sei erwähnt, daß Mitglieder

einer ESO-Forschungsgruppe den Einfluß der Materieverteilung auf großen Skalen auf Quasarspektren studieren. Anstelle eines statischen Modells der Materieverteilung liefert die oben genannte Verallgemeinerung des PANCAKE-Bildes ein dynamisches Modell, das die wesentlichen Parameter für dieses Studium enthält). Die Auseinandersetzung mit diesem Modell weist in Richtung auf eine sinnvolle Weiterentwicklung der Standard-Approximation. Die detaillierte Analyse dieser Arbeit will ich auf dieses Modell ausdehnen, um auch im Rahmen der Gravitationstheorie entsprechende Approximationen zu konstruieren. Eine interessante Fragestellung in diesem Zusammenhang ist auch, ob man die in numerischen Simulationen beobachtete Vervielfachung der Dichtepeaks im Rahmen dieses Modells reproduzieren kann (vgl. Figur 4k). Die Behandlung von Vielstromsystemen mit Selbstgravitation ist ein bislang unbewältigtes Problem, das vermutlich mit Hilfe neuerer Entwicklungen zum Verständnis von Bifurkationen von Lösungen in dynamischen Systemen verstanden werden könnte.

Betrachtet man die natürliche *Fortsetzung* der in *dieser Arbeit* neu entstandenen Ansatzpunkte, so sehe ich zunächst zwei anwendungsorientierte Schwerpunkte:

1. Die Analyse der Singularitätenstruktur: Die in II.8. bereitgestellten Möglichkeiten, die generischen Strukturelemente in zweidimensionalen Medien, eingebettet in die globale Vernetzung der Kaustiken, aufzulösen, erlauben ein detailliertes phänomenologisches Studium der *inneren Struktur* von PANCAKES, das von Arnol'd et al. (1982b) begonnen wurde. Die Analyse der Kaustiken und deren Metamorphosen wird in drei Dimensionen auch für den Vergleich mit Beobachtungen interessant: Eine morphologische Klassifizierung der auf einen Beobachter projizierten Objekte hoher Dichte kann als Beobachtungskriterium der in naher Zukunft genaueren Beobachtungsergebnisse, (deren Entwicklung in jüngster Zeit beschleunigt wurde), dienen. In diesem Zusammen-

hang können statistische Fragen (z.B. über die Häufigkeit des Auftretens bestimmter Typen bei Spektren mit Gaußscher Statistik) geklärt werden.

2. Die Modifikation des Anfangsspektrums und des Hintergrundmodells: Eine Möglichkeit der Differenzierung des Spektrums wurde bereits in II.8. vorgeschlagen; andere Veränderungen und deren Einfluß auf beobachtungsrelevante Daten kann das Verständnis der Strukturbildung erhöhen, da diese im PANCAKE-Szenarium wesentlich von eingepprägten Strukturen des Spektrums bestimmt ist. Das Studium des Einflusses einer "Krümmung" des Hintergrundmodells, das durch die in II.7. definierte Approximation (auf der Basis strenger Lösungen für die Entwicklung von Inhomogenitäten in solchen Modellen) studiert werden kann, ist eine aktuelle Fragestellung (Silk & Vittorio 1987).

Folgende Arbeiten zum weiteren Ausbau der analytischen Grundlagen könnten die vorliegende Arbeit fortsetzen:

1. Eine direkte Fortsetzung meines Anliegens, eine geschlossene Beschreibung von Strukturbildung im Rahmen der Gravitationstheorie zu ermöglichen, sehe ich in dem Ausbau der Ansätze des Kapitels III, (speziell III.1.). Hier sehe ich eine (in Anbetracht der Erkenntnisse des Kapitels II notwendige) Erweiterung des Standardbildes. Durch eine dreidimensionale Verallgemeinerung der in III.1.1. vorgestellten Integrationsmethode könnten Lösungen konstruiert werden, die mit hinreichend allgemeinen Anfangsdaten unter Berücksichtigung aller Nichtlinearitäten der Gravitation die Entwicklung beschreibt. Da das Verständnis der Galaxienbildung zwar wesentlich von Nichtlinearitäten (nicht aber etwa von relativistischen Effekten) abhängt, ist die Beschreibung im Rahmen der Newtonschen Theorie zunächst ein sinnvoller Rahmen. Der in dieser Arbeit gewonnene Einblick legt nahe, daß längst nicht alle Konsequenzen der Gravitationstheorie verstanden sind. Ich

erwähnte in III.1.4.u.5. die Möglichkeit des Verständnisses des Problems der *Fragmentierung* von PANCAKES, (vgl. I.3.), das durch solche Verallgemeinerungen dynamisch beschreibbar werden könnte.

2. Nicht ausgeschöpft ist die Tatsache, daß verstandene Zusammenhänge im Rahmen der Plasmaphysik prinzipiell auf das vorliegende Problem der Strukturbildung in expandierenden Weltmodellen durch die strukturelle Verwandtschaft der Gleichungen, (vgl. Doroshkevich et al. 1980a), übertragbar sind. Insbesondere ist die Beschreibung der Neutrino-Komponente im Rahmen der kinetischen Theorie wichtig, um den Effekt von Geschwindigkeitsdispersion besser zu verstehen. Ich will einfache Modelle auf der Basis der in dieser Arbeit vorgestellten Approximation konstruieren, die diesen Effekt im nichtlinearen Regime berücksichtigen. In diesem Zusammenhang ist die Beschreibung zweikomponentiger Neutrino-Baryon-PANCAKES, (vgl. Shapiro & Struck-Marcell 1985), vorrangig, um den gegenseitigen Einfluß dieser Komponenten zu erfassen, die sich auf verschiedenen räumlichen Skalen entwickeln. Vgl. dazu auch die Arbeiten von Ronald Kates (1988).
3. Der Einfluß von anfänglichen Rotationsstörungen des Geschwindigkeitsfeldes führt, wie in III.3. gezeigt, zur Ausbildung starker Wirbel im "nichtlinearen Regime". Zur Verfügung stehende Approximationen sind ungeeignet, um diesen Einfluß zu studieren. Eine numerische Behandlung des Kollapses von Staubkontinua mit anfänglichen Wirbeln soll, zusammen mit einer strengen Lösung, deren Ausarbeitung ich noch abschließen will, darüber Aufschluß geben.

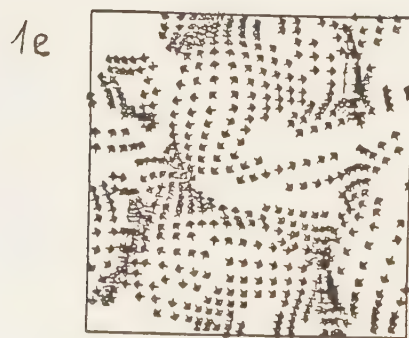
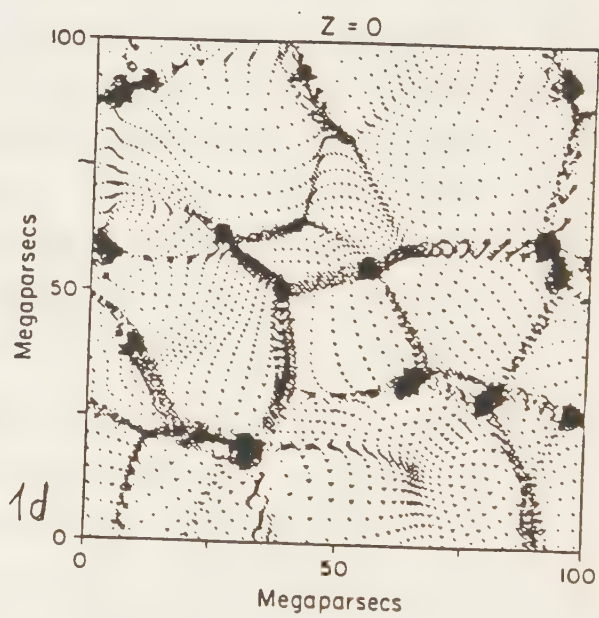
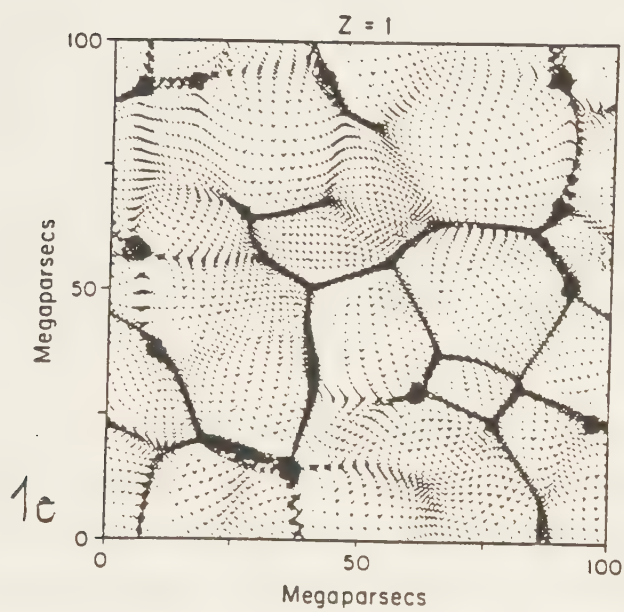
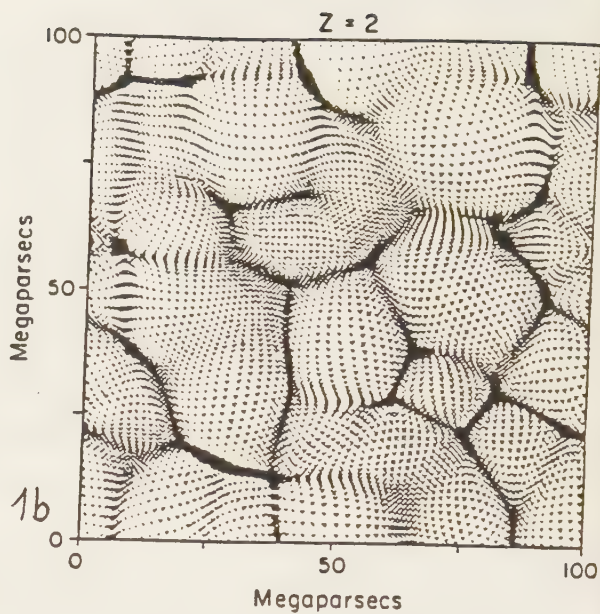
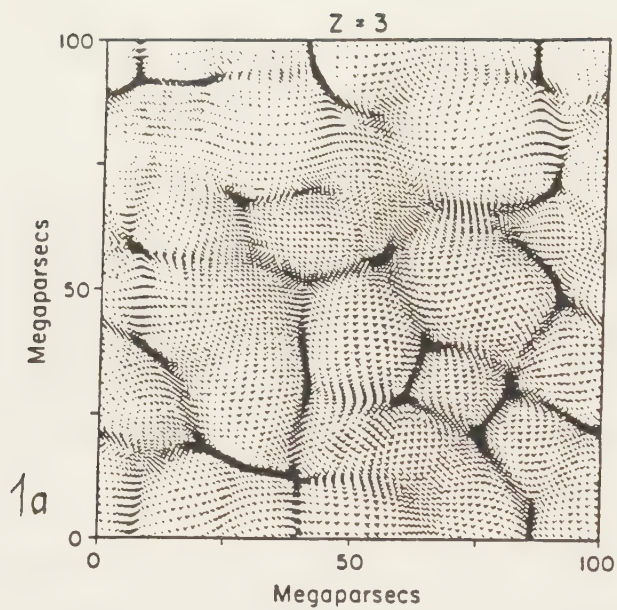
FIGURENAPPENDIX

FIGUR 1

Für die Literatur repräsentative numerische Simulationen in zwei Dimensionen (aus: Melott 1983b), zweidimensionaler Schnitte einer dreidimensionalen Simulation (aus: Shapiro et al. 1983, vgl. auch die Erläuterungen von Shapiro 1984) und dreidimensionaler Dichteverteilungen (Kopie des Originalplots aus einem Vortrag von A. Szalay in Erice, veröffentlicht in Joan Centrella & Melott 1983).

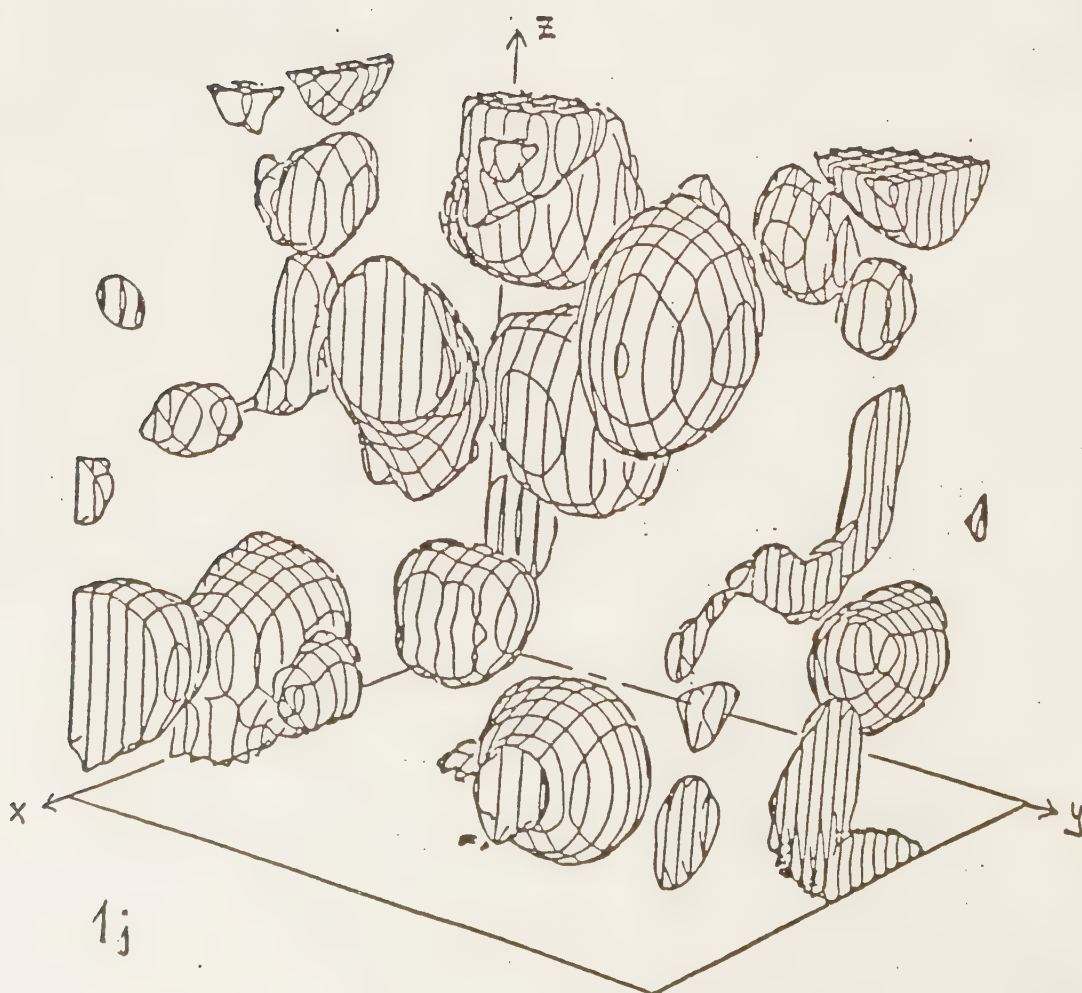
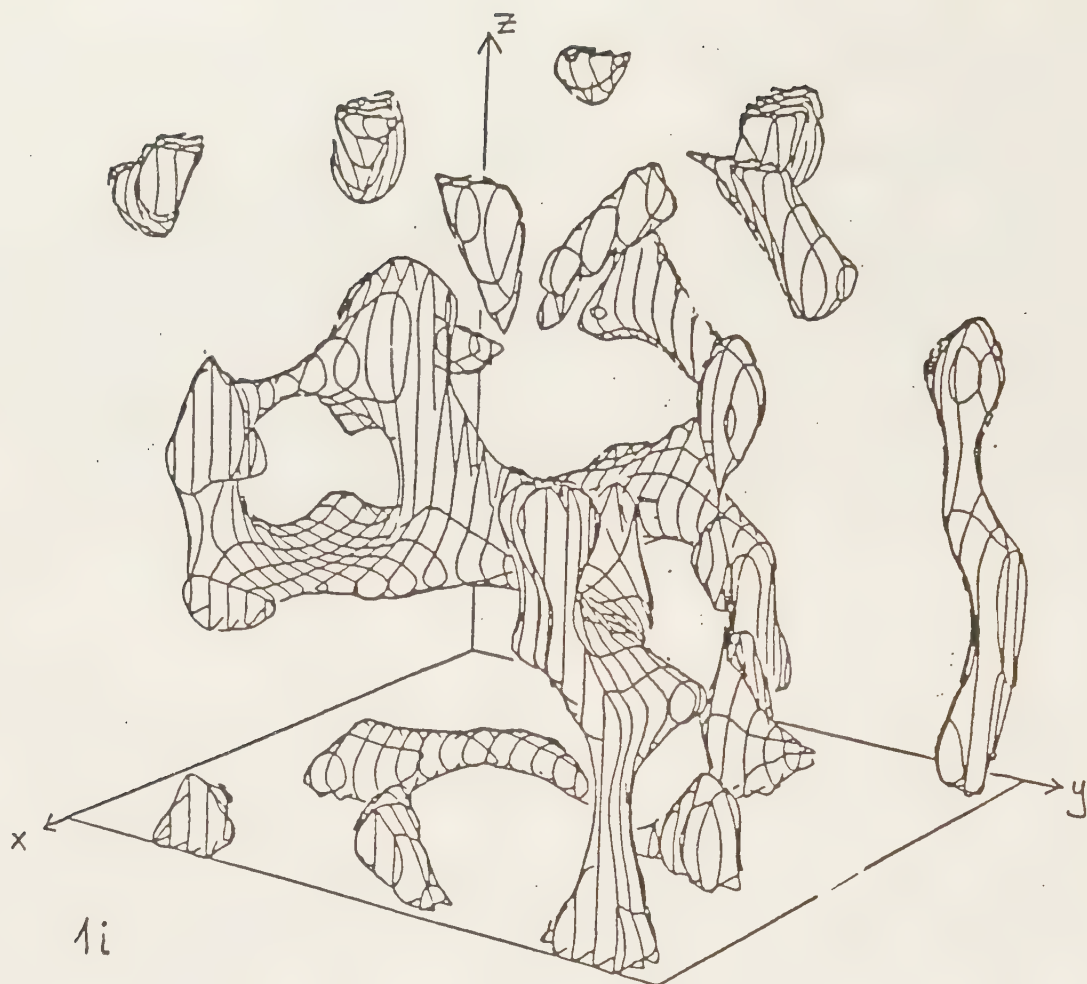
Fig.1.a-d: Bilder einer zweidimensionalen Simulation ($Z=3$, Fig.1a; $Z=2$, Fig.1b; $Z=1$, Fig.1c; $Z=0$, Fig.1d). Man erkennt die Beständigkeit der großräumigen Netzstruktur, die bereits bei $Z=4$ deutlich ausgeprägt ist, vgl. hierzu das in II.8. diskutierte analytische Modell, Fig.6. (Amplitude des 2D-Spektrums ist $4 \cdot 10^{-3}$ bei $Z_0 = 1000$). Man sieht insbesondere die Ausbildung massiver Proto-Galaxienhaufen in den Vertices der Zellen. Auffallend ist jedoch die geringe räumliche Auflösung der Strukturen selbst bei dieser verhältnismäßig aufwendigen Simulation (90000 "clouds" im Rahmen der CIC-Methode, vgl. I.3., verteilt auf 10000 Zellen im Vergleich zu 4096 "clouds" auf 4096 Zellen bei Doroshkevich et al. 1980).

Fig.1.e-h: Vier in der Reihenfolge e,f,g,h aufeinanderfolgende Schnitte einer dreidimensionalen Verteilung bei $Z=4$ (Die Amplitude des 3D-Spektrums ist $2 \cdot 10^{-3}$ bei $Z_0 = 1000$, vgl. II.8.). Jeder Pfeil repräsentiert ein Teilchen; die Richtung ist die der Geschwindigkeitskomponente der Ebene. Die Bilder zeigen deutlich die Dominanz des längs PANCAKES quasi-eindimensionalen Materieeinfalls.



FIGUR 1 (Fortsetzung)

Fig.1.i,j: Diese Figuren zeigen als einzige der veröffentlichten Bilder von Simulationsrechnungen die fast sphärischen "voids" (durch Plotten der Unterdichten $\rho/\rho_0 \leq (1/2)$ in Fig.1j) sowie die diese einrahmende PANCAKE-Fläche. In Fig.1i ist, wie in den meisten Bildern, die Überdichte $\rho/\rho_0 \geq 2$ geplottet. Man erkennt die filamentartige Verteilung der Materie, die eine großräumige Zellstruktur konstituiert.



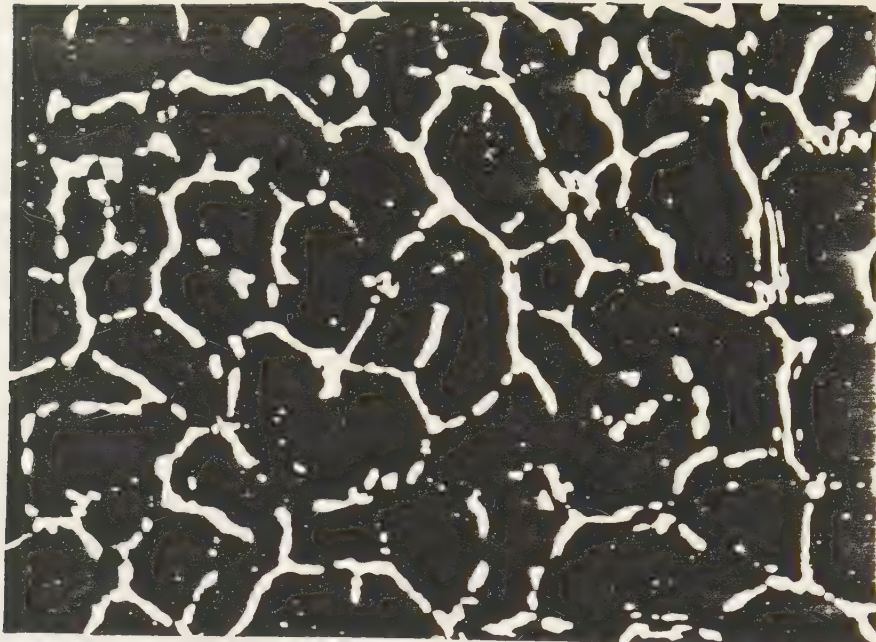
FIGUR 2

Illustration zur geometrisch-optischen Analogie. "Optische Simulationen" des Szenariums, (vgl. dazu Zel'dovich et al. 1983).

Fig.2a: Im Zusammenhang mit der Arbeit von Zel'dovich et al. (1983) aufgenommenes Bild des Grundes eines Wasserbeckens, (Foto von Shandarin, priv. Komm.). Das an (auf einer gewissen Skala kohärenten) Oberflächenwellen des Wassers gebrochene Licht bildet am Wassergrund die typische Vernetzung von Kaustiken, die in numerischen Simulationen (vgl. Fig.1), aber auch am analytischen Modell (vgl. II.8., Fig.6) beobachtet wird. Dies illustriert die phänomenologische Ähnlichkeit des vorliegenden Problems der Strukturbildung aufgrund von Selbstgravitation in einem expandierenden Universum mit Strukturbildung in "kinematischen Modellen", (vgl. dazu Shandarin & Zel'dovich 1988).

Fig.2b,c: Bild des Wassergrundes eines ca. 1,50 m tiefen Beckens (Aufnahme Ungererbad, München 1987). Die das "Anfangsspektrum" bestimmende Verteilung der Oberflächenwellen weicht mehr von einer Gaußschen Verteilung der Amplituden ab als die Verteilung, die der Figur 2a zugrundeliegt; das Detailbild (Fig.2c) zeigt räumlich aufgelöste Singularitäten, vgl. Fig.6.

2a



2b



2c



FIGUR 3

Beobachtungsergebnis einer Verteilung von 1100 Galaxien in einem ausgewählten Streifen ($6^\circ - 117^\circ$) des Coma-Haufens, (aus: deLapparent et al. 1986).

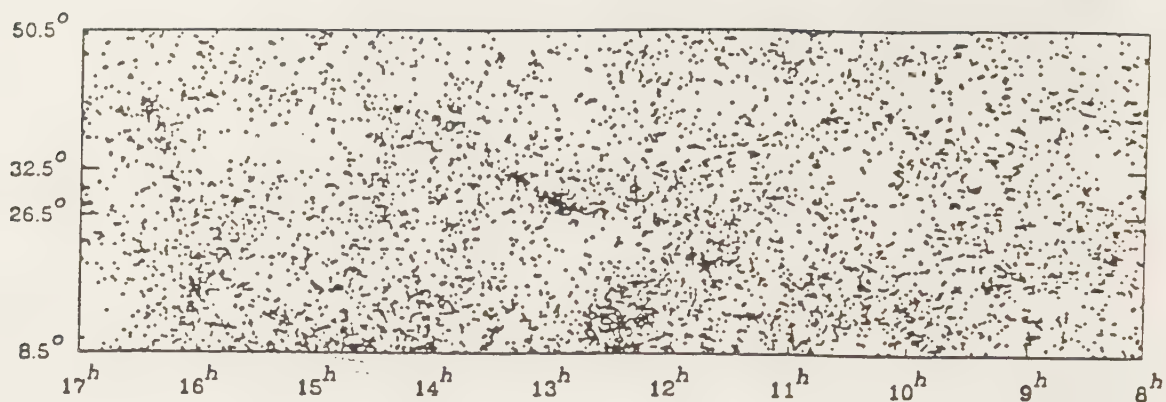
Die Galaxien erscheinen auf nahezu sphärische Flächen verteilt, dazwischen fast "leere" Gebiete mit etwa $1/5$ der mittleren Dichte und Ausdehnungen von $25/h_{100}$ bis $50/h_{100} \text{ Mpc}$. Dies entspricht etwa dem typischen Bild des PANCAKE-Szenariums; (vgl. dazu die Betrachtung des analytischen Modells in II.8., (Fig.6), die sog. "voids" sind dort (mit $1/5$ der mittleren Dichte) Schwarz dargestellt, die Kohärenzlänge von 40 Mpc für $30eV/c^2$ Neutrinos führt etwa auf die beobachteten Durchmesser der "voids".

Fig.3a: Projektion der 7031 Objekte mit $m_B \leq 15,5$, die im Katalog von Zwicky et al. (1961-1968) aufgeführt sind, (Zitat in deLapparent et al. 1986), in der Region $8^h \leq \alpha \leq 17^h$ und $8^\circ,5 \leq \delta \leq 50^\circ,5$, (α und δ bezeichnen hier Rektaszension bzw. Deklinationswinkel).

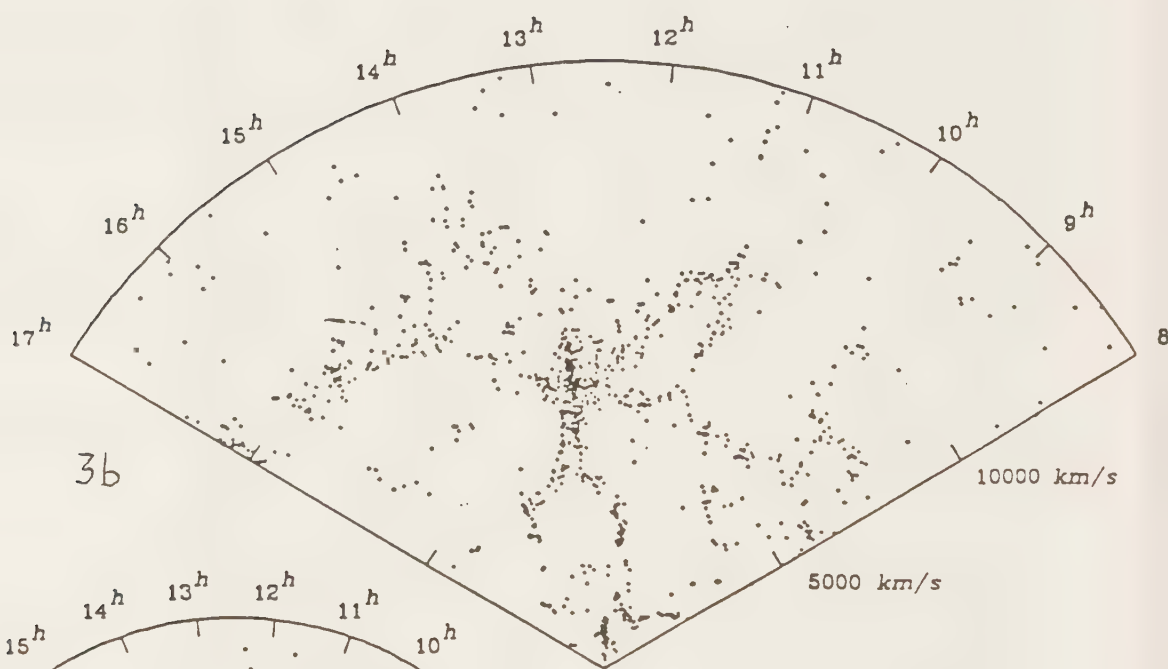
Fig.3b: Beobachtete Geschwindigkeiten sind aufgetragen gegen die Rektaszension im Deklinationsbereich $26^\circ,5 \leq \delta \leq 32^\circ,5$. Die geplotteten 1061 Objekte haben $m_B \leq 15,5$ und $v \leq 15000 \text{ km/s}$.

Fig.3c: Diese Figur entspricht der Figur 3b. Es sind jedoch nur 182 Galaxien mit $m_B \leq 14,5$ und $v \leq 10000 \text{ km/s}$ geplottet.

Die Arbeit von deLapparent et al. wurde kritisiert, da die Autoren ein verhältnismäßig untypisches Gebiet (vgl. Fig.3a) ausblenden. Eine entsprechende Arbeit derselben Autoren für ein benachbartes Gebiet ist in Vorbereitung (Shandarin, priv. Komm.).



3a



3b



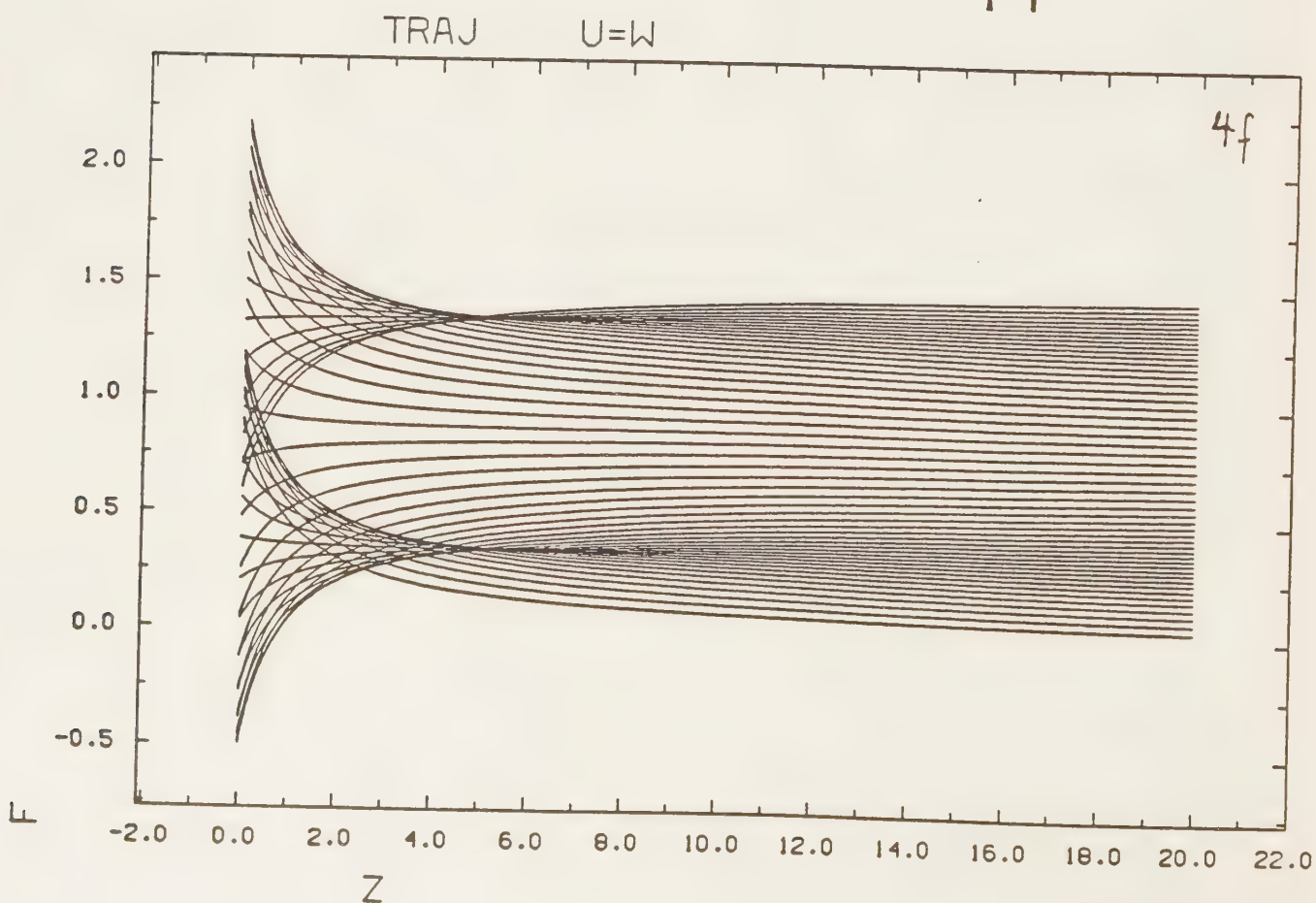
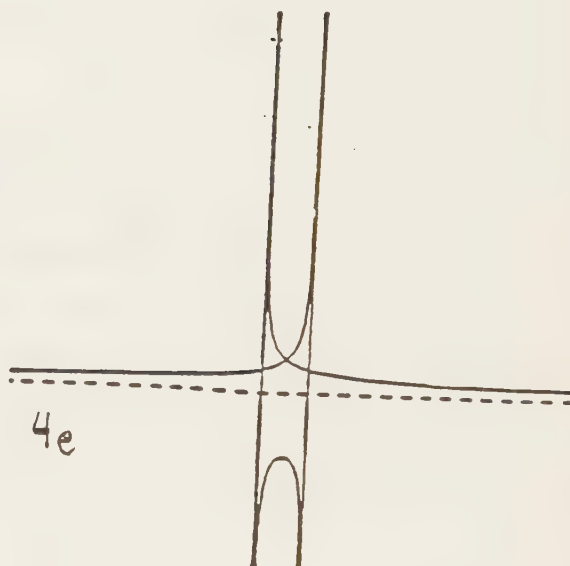
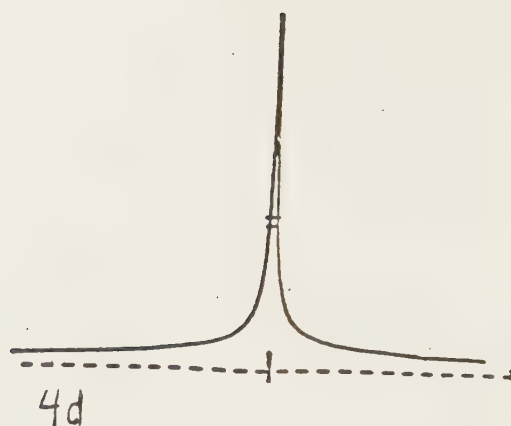
3c

FIGUR 4

Die Entwicklung eindimensionaler Inhomogenitäten auf einem flachen Friedmann-Hintergrund.

Fig.4a-e: Dargestellt ist die Entwicklung der Dichte im "Eulerschen Raum" für ein sinusoidales Anfangsspektrum. Nach dem Auftreten der Singularität entsteht formal eine Dreideutigkeit der Dichteverteilung (ein Dreistromsystem). Ein System von drei sich selbst durchdringenden Teilchenströmen ist (auch in höheren Dimensionen) die genaue Definition eines PANCAKES.

Fig.4f: Dargestellt sind die Trajektorien des sinusoidalen Modells in Abhängigkeit von der Rotverschiebung im "Eulerschen Raum", $x_1 = F_1(X_1, Z)$ sind die Integralkurven des skalierten Pekuliargeschwindigkeitsfeldes u_1/a . Die Parameterwahl wurde so getroffen, daß die Lösung der (in einer Dimension exakten) "Zel'dovich-Approximation" entspricht, (vgl. II.8.). Man erkennt die semikubische Parabelform der Kaustik in der zweidimensionalen "Eulerschen Raumzeit", die einer A_3 -Singularität (im Rahmen der Arnol'dschen Klassifikation) entspricht.



FIGUR 4 (Fortsetzung)

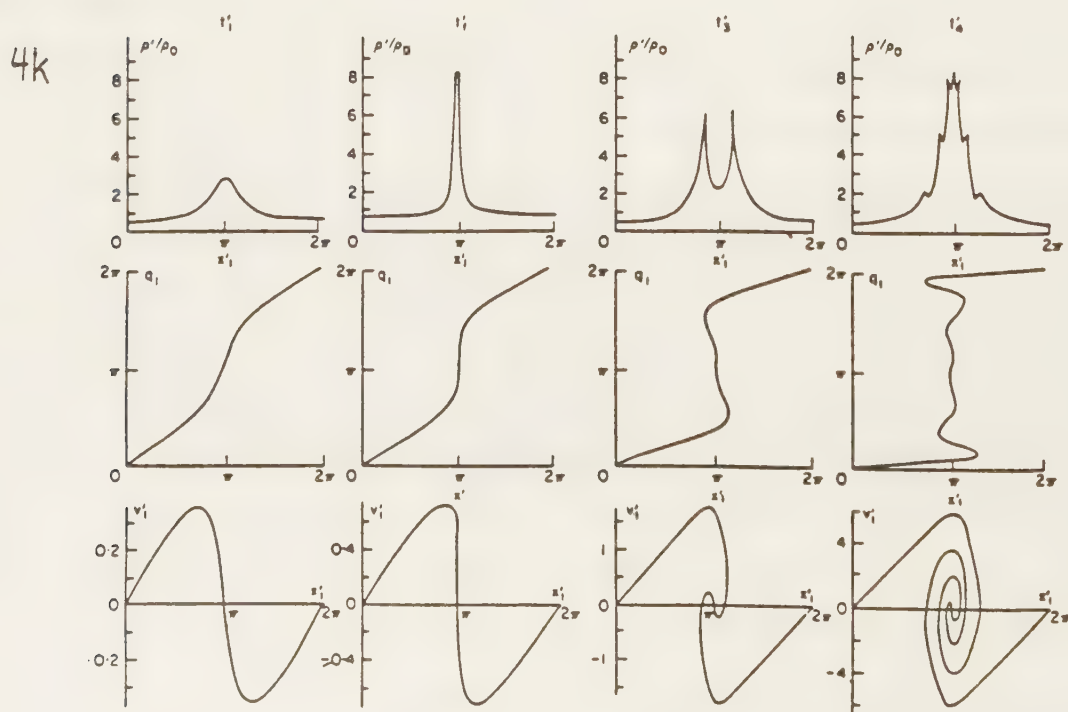
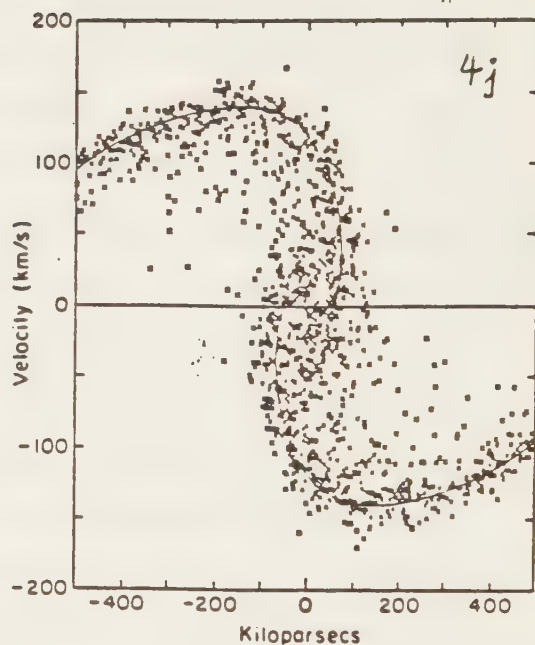
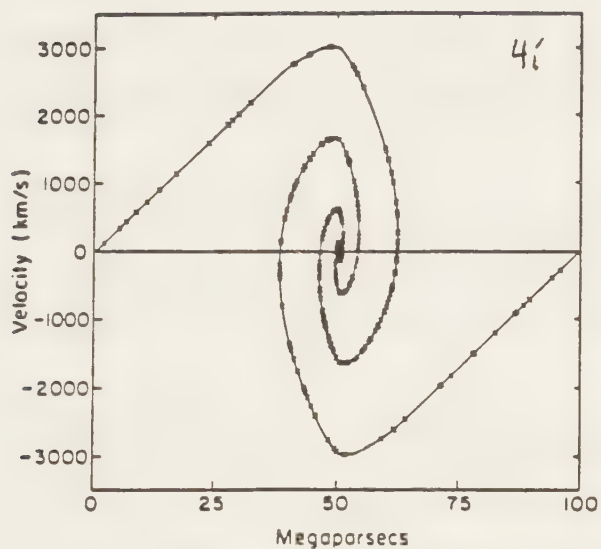
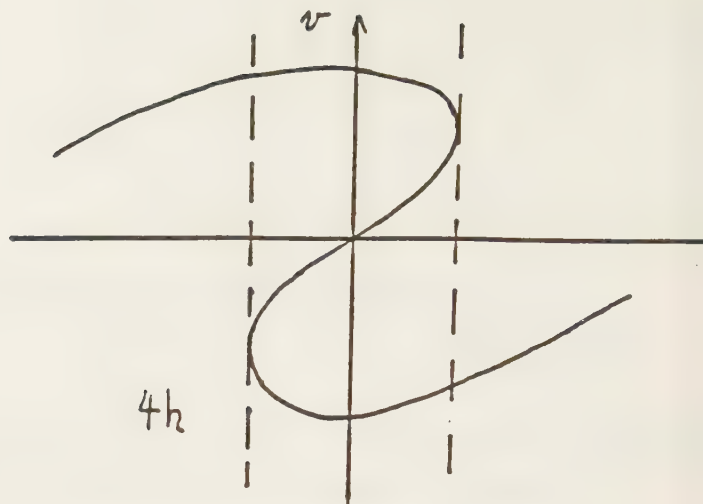
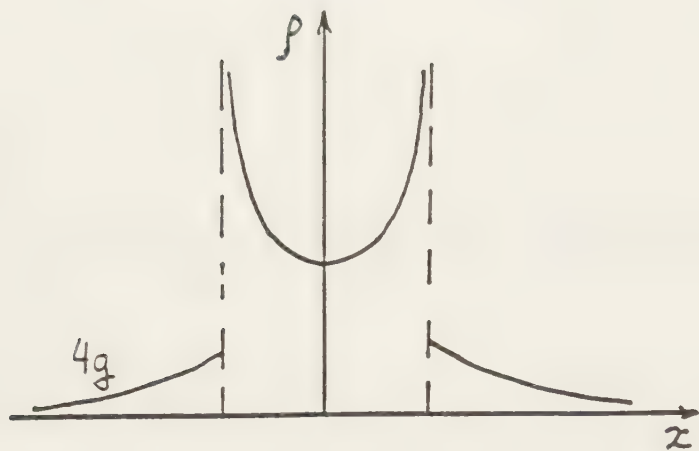
Die Entwicklung eindimensionaler Inhomogenitäten auf einem flachen Friedmann-Hintergrund.

Fig.4g: Das Dichteprofil nach der Entstehung der Singularität, (vgl. Fig.4e). Das Auftreten des Dreistromsystems führt durch die Konvention der Addition von Strömen, (vgl. II.7.) auf eine "Stoßstruktur" der Materieverteilung. Diese Konvention liefert kurz nach dem Auftreten der Singularität eine realistische Dichteverteilung, vgl. aber Fig.4k. Diese Konvention wurde auf die Betrachtung des zweidimensionalen analytischen Modells in II.8. übertragen.

Fig.4h: Das Geschwindigkeitsprofil für den entsprechenden Zeitpunkt zeigt die Mehrdeutigkeit der Abbildung vom "Lagrangeschen" in den "Eulerschen Raum": Für einen Ort gibt es drei Geschwindigkeiten, die verschiedene "Teilchen" markieren und damit ein Dreistromsystem definieren.

Fig.4i,j: Das Resultat einer eindimensionalen numerischen Simulation (aus Melott 1982) mit approximativer Simulation einer Geschwindigkeitsdispersion der Neutrinos, (Fig. 4j zeigt den zentralen Ausschnitt der Fig. 4i mit höherer Auflösung). Dieses Bild wird als Hinweis dafür verwendet, daß Geschwindigkeitsdispersion die prinzipielle Struktur des Phasenportraits nur im Zentrum der kollabierenden Struktur etwas verwischt, (vgl. die Fig.4k sowie auch Melott 1983a, Zel'dovich & Shandarin 1982b, Shukurov 1981); die Behandlung der Neutrinos als "Staub" ist auf dieser Skala eine für viele Betrachtungen hinreichend gute Näherung.

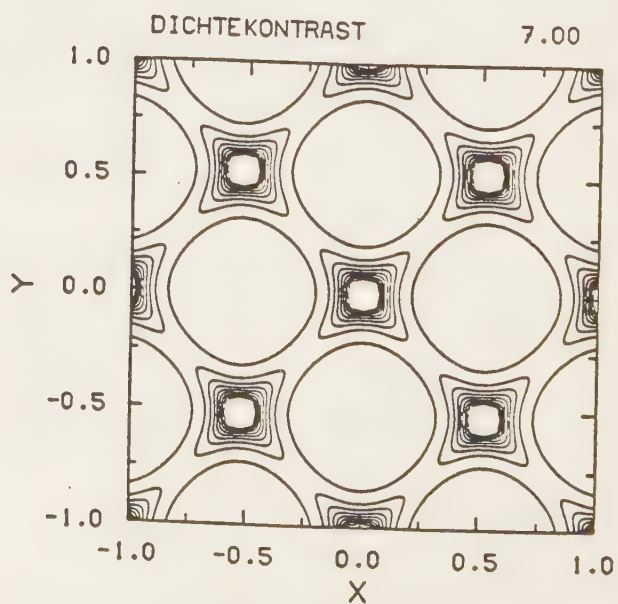
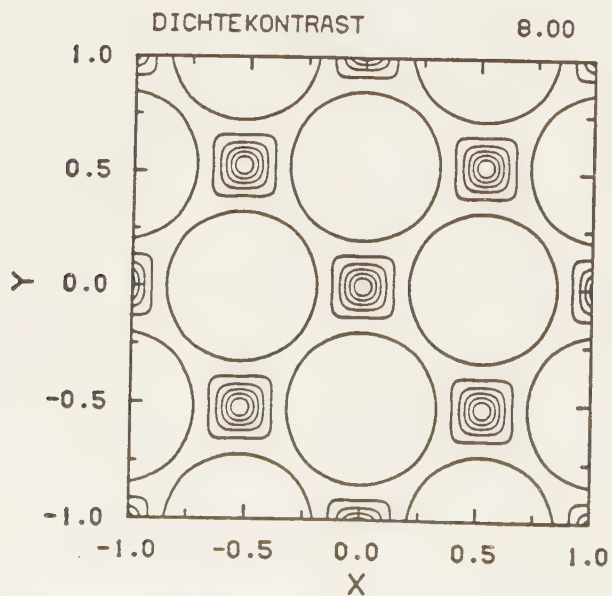
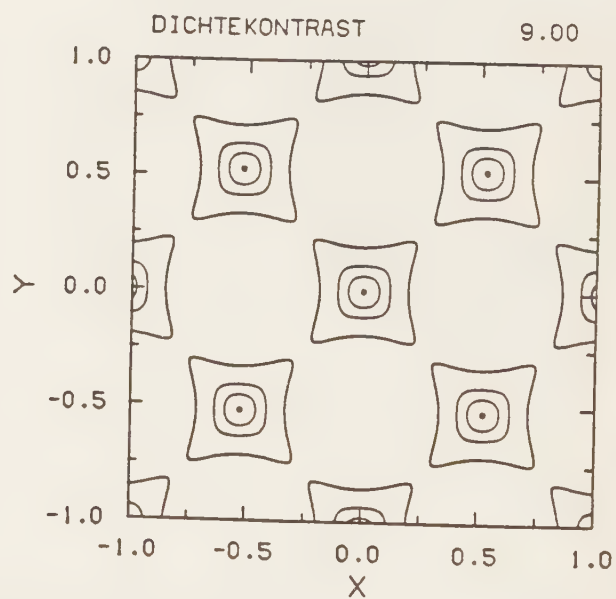
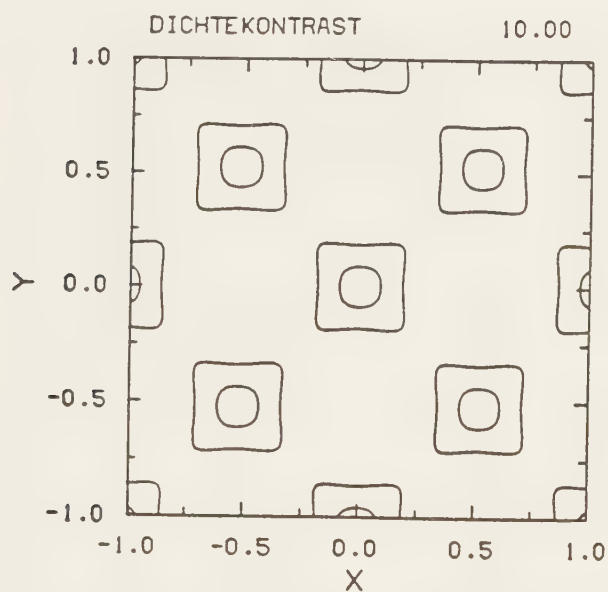
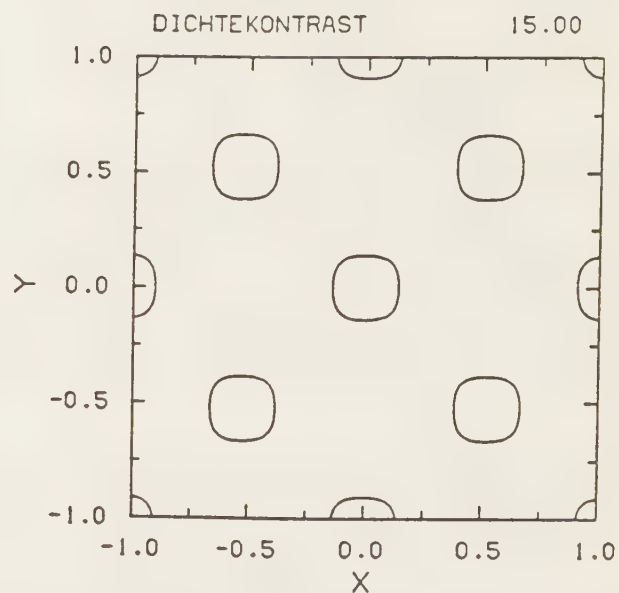
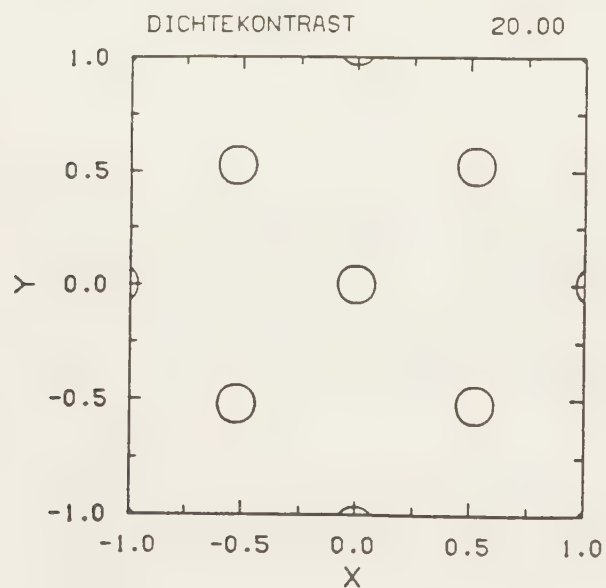
Fig.4k: Resultat einer eindimensionalen numerischen Simulation (Doroshkevich et al.1980). Man erkennt deutlich den qualitativen Unterschied zur analytischen Beschreibung (Fig.4a-h): Nach dem Auftreten des Dreistromsystems wird im analytischen Modell die gravitative Wechselwirkung der Ströme vernachlässigt. Die numerische Simulation zeigt, daß diese Wechselwirkung zu einer Vervielfachung der Ströme führt, die einer Bifurkationskaskade, wie sie in "Feigenbaum-Szenarien" diskutiert wird, ähnelt. Dies resultiert in einer Vervielfachung der Dichte-Peaks. Die Phasenporträts ("Lagrange-/Euler-Raum" und Geschwindigkeiten/ "Eulerraum" zeigen Oszillationen der Teilchen um die Ebene der PANCAKES.



FIGUR 5

Approximative Entwicklung des Dichtekontrasts eines zweidimensionalen Modellspektrums (vgl.II.8.1.). Dieses einfache analytische Modell zeigt mit hoher räumlicher Auflösung (100 Millionen Teilchen verteilt auf 512^2 Zellen) die Ausbildung einer Zellstruktur mit anschließender Materiekonzentration auf die Knoten des Netzes.

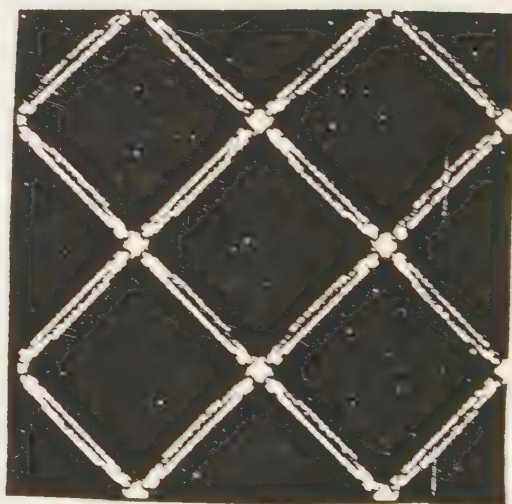
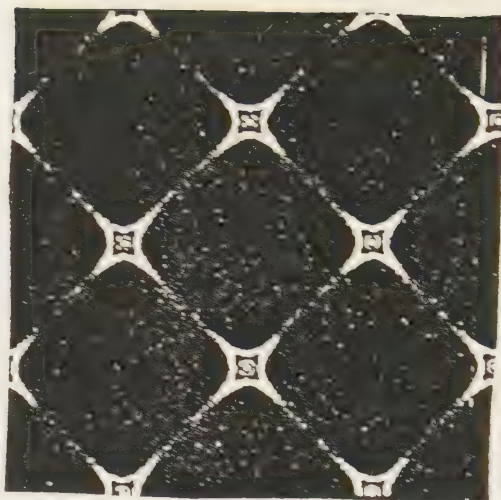
Fig.5a: Diese Figur zeigt zunächst die Entwicklung des Dichtekontrasts im "Lagrange-Raum" (frühes nichtlineares Regime) bis zur Ausbildung der Zellstruktur, (mit geringerer räumlicher Auflösung), gezeigt für sechs aufeinanderfolgende "Lagrangesche Ebenen" (die Zahl rechts oben markiert die Rotverschiebung, (vgl.II.8.1.; die Konturen wachsen gemäß $\delta = 1, 2, 3$, u.s.f.).



FIGUR 5 (Fortsetzung)

Approximative Entwicklung des Dichtekontrasts eines zweidimensionalen Modellspektrums, (vgl.II.8.1.).

Fig.5b: Entwicklung des Dichtekontrasts im "Eulerschen Raum" (frühes und spätes nichtlineares Regime). Die ersten beiden Figuren entsprechen den Figuren 5a für $Z = 15$ und $Z = 10$. In der Folge sind sechs weitere "Eulersche Ebenen" zu späteren Zeiten abgebildet, ($Z = 8, Z = 6, Z = 4, Z = 3, Z = 2, Z = 1$). Man erkennt, daß sich zunächst (kurz nach dem Auftreten der ersten Singularitäten (PANCAKE-Entstehung)) eine Netzstruktur in verhältnismäßig kurzer Zeit ausbildet. Danach fällt die Materie wieder auf die Knoten des Netzes (= ursprüngliche Entstehungsorte) zurück. Dieser Materieeinfall auf die so interpretierten massereichen Proto-Galaxienhaufen ist begleitet von einer sich stoßwellenartig ausbreitenden Materiefront (vgl. die Abbildung 4g für den eindimensionalen Fall; die Addition der Ströme wurde berücksichtigt, vgl.II.8.; beachte aber, daß sich die Teilchen der Ströme durchdringen, die Sprechweise "Stoßfront" entspricht einer Interpretation der Trajektorienkreuzung als "Reflexion" bei Austausch der Teilchenidentitäten). Die Materie zwischen diesen "Stoßfronten" erreicht schnell den Wert der mittleren Dichte, sie fällt im letzten Bild sogar in den Bereich der "voids" mit $1/5$ der mittleren Dichte. Zurück bleibt ein massereicher Klumpen, dessen innere Struktur durch die vorliegende Approximation nicht mehr beschrieben werden kann. (In diesem Bereich sind Wechselwirkungen der Vielstromsysteme sowie auch dispersive Effekte nicht vernachlässigbar). Die letzten beiden Figuren machen die Grenzen der analytischen Beschreibung deutlich: Die PANCAKE-"Dicke", d.i. der Abstand der beiden "Stoßfronten", wächst im Vergleich zur numerischen Simulation der Zellstruktur, vgl. Fig.1, schneller an. Wird die gravitative Wechselwirkung des Dreistromsystems innerhalb dieser Stoßfronten nicht vernachlässigt, so bleiben die PANCAKES länger auf schmalere Gebiete beschränkt.

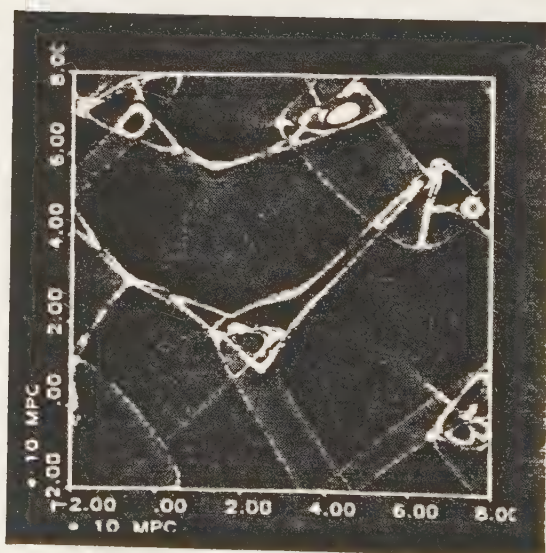
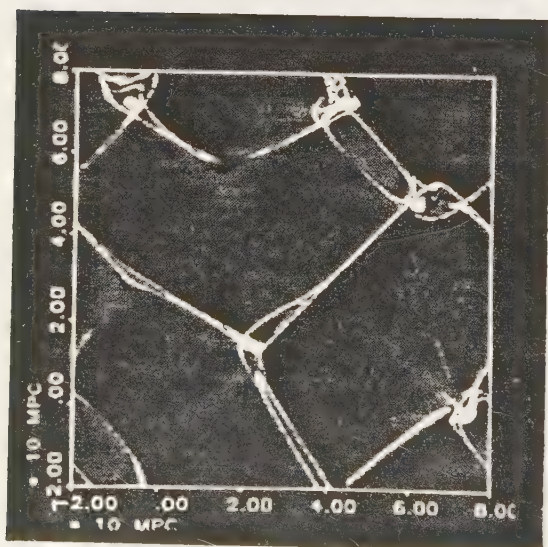
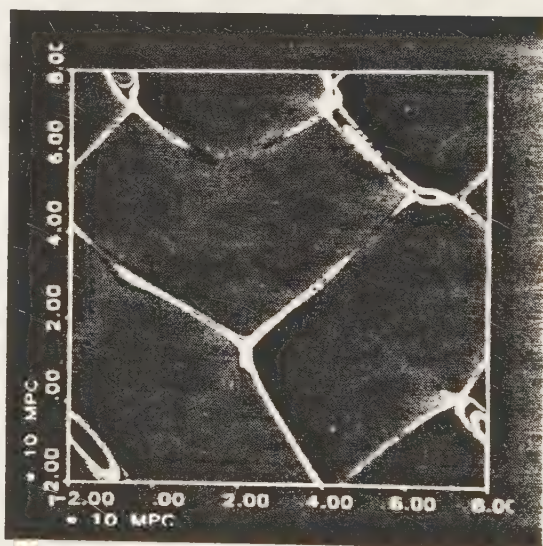
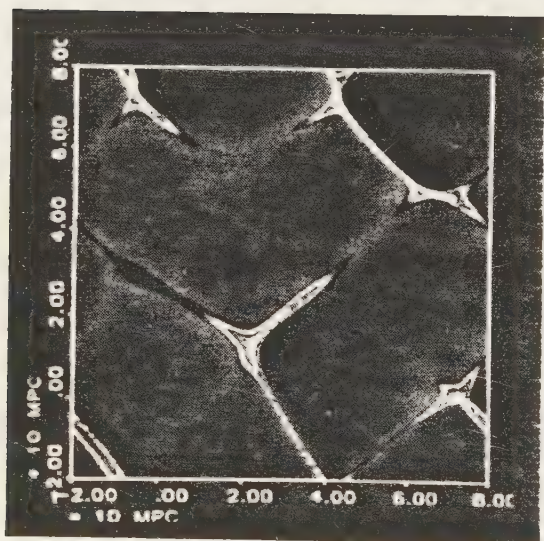
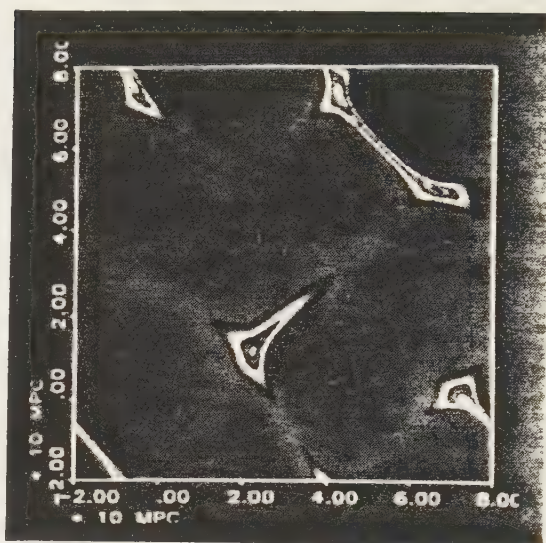
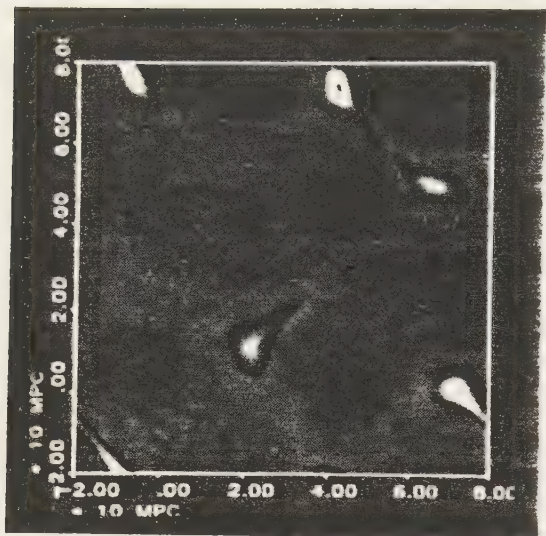


FIGUR 6

Nichtlineare Entwicklung des Dichtekontrasts im Rahmen der "verallgemeinerten Approximation".

Die Figuren zeigen eine hohe räumliche Auflösung generischer Strukturelemente wie sie bislang nur in einer aufwendigen numerischen Untersuchung von Arnol'd et al. (1982b) gefunden wurden, (hier 100 Millionen "Teilchen" verteilt auf 512^2 Flächenelemente). Das analytische Modell zeigt die Singularitätenstruktur außerdem eingebettet in die globale Vernetzung der Kaustiken. Man sieht auf den Bildern alle generischen Kaustiken, wie sie in der Arnol'dschen Klassifikation aufgeführt sind, (vgl. Arnol'd 1982, Arnol'd et al. 1982a).

Fig.6a Dieses Modell basiert auf einem Fourierspektrum mit "cut-off" bei 40 Mpc, (vgl. II.8.2.). Die Amplitude des Dichtekontrasts bei $Z_0 = 1000$ ist $\delta = 10^{-3}$, die Amplituden der Spektren für das Geschwindigkeits- und das Gravitationspotential sind identisch ($\mu_1 = \mu_2 = 2 \cdot 10^{-4}$) und haben eine Gaußsche Verteilung. Insgesamt sind 50 Fouriermoden im Spektrum. Ein Bild zeigt die Verteilung auf einer "Eulerschen Ebene" von $100 \times 100 \text{ Mpc}$. Dargestellt sind sechs aufeinanderfolgende "Eulersche Ebenen" für die Rotverschiebungen $Z = 10, Z = 6, Z = 4, Z = 3, Z = 2$ und $Z = 1$. Ein Ausschnitt $100 \times 100 \text{ Mpc}$ hat periodische Randbedingungen. Diese Abbildungen werden in Farbe mit dem in II.8.2. beschriebenen Farb-Code veröffentlicht (Buchert 1988a).



FIGUR 6 (Fortsetzung)

Nichtlineare Entwicklung des Dichtekontrasts im Rahmen der "verallgemeinerten Approximation".

Fig.6b,c: Die Figur 6b zeigt einen Ausschnitt aus der Figur 6a für $Z = 1$. Darunter ist derselbe Ausschnitt dargestellt, allerdings mit insgesamt 162 Fouriermoden im Anfangsspektrum, Fig.6c (vgl. II.8.2.). (Die Figur 6b wird in Shandarin, Zel'dovich (1988) publiziert). Man erkennt gut das Auftreten eines zweiten PANCAKES innerhalb des ersten mit bereits "gebrochener Wand" (vgl. I.5.) aufgrund von zwei Eigenwerten des Deformationstensors im zweidimensionalen Fall, (vgl. I.1.). Die Figur 6c läßt sich aufgrund der Anzahl der Fouriermoden mit der entsprechenden numerischen Simulation vergleichen (Fig.1).

6b



6c



FIGUR 7

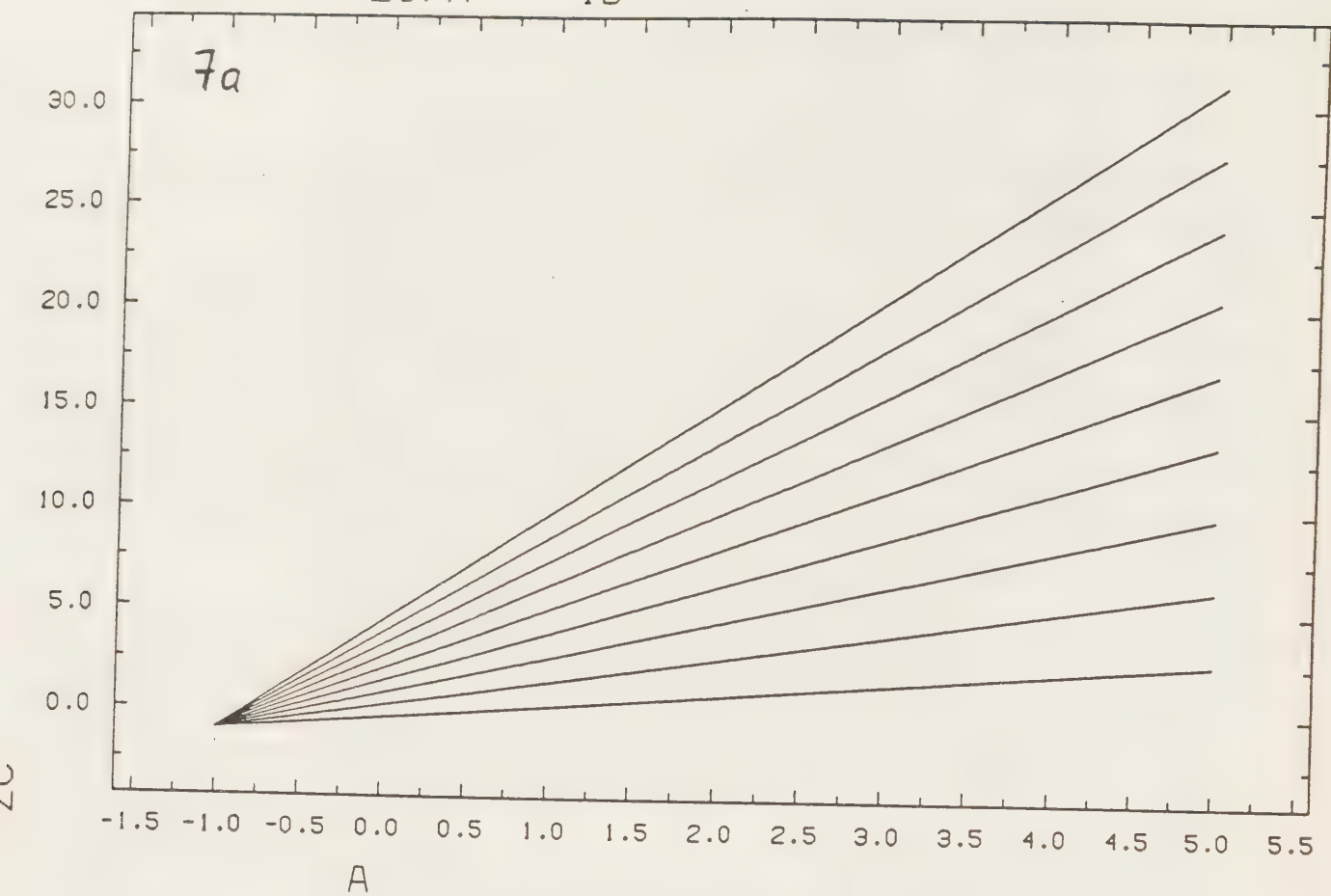
Abhängigkeit des Kollapszeitpunkts von relativer Phase und relativer Amplitude der Störungen, (vgl. II.8.3.); (die Buchstaben A und P in den Plots entsprechen κ und τ im Text).

Betrachtet ist die Entwicklung eindimensionaler Inhomogenitäten auf einem flachen Friedmann-Hintergrund. (Die absoluten Werte in diesen Figuren dürfen nicht mit entsprechenden dreidimensionalen Modellen verglichen werden); der relative Effekt einer Amplituden- und Phasendifferenz der Störungsfelder wird in diesen Figuren veranschaulicht. Die eingetragenen 9 Kurven entsprechen jeweils einer anderen Wahl der anfänglichen Amplitude des Dichtekontrasts, (die obere Kurve entspricht in beiden Figuren der Wahl $\delta = 9 \cdot 10^{-3}$, die untere Kurve der Wahl $\delta = 1 \cdot 10^{-3}$).

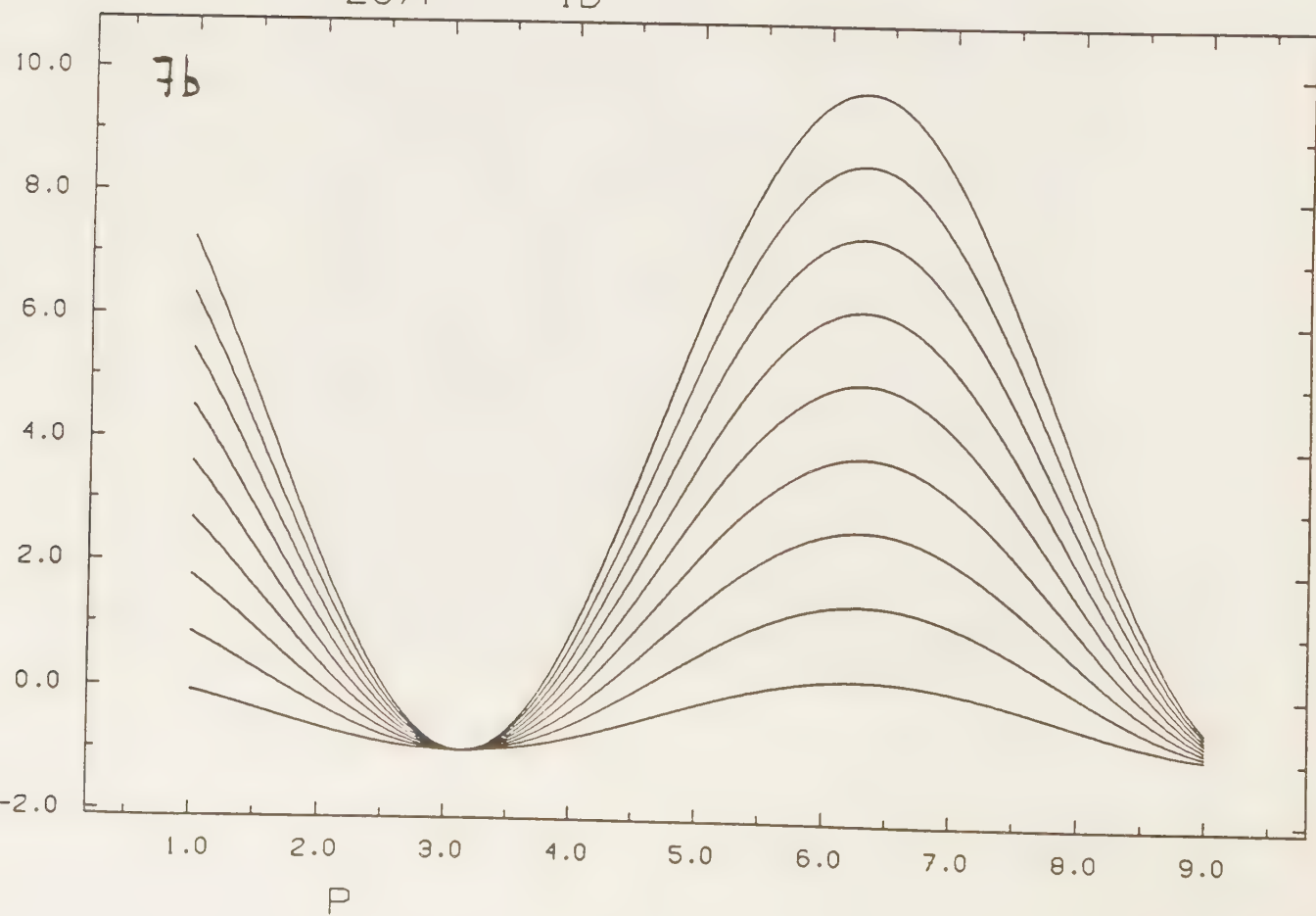
Fig.7a: Abhängigkeit von der relativen Amplitude bei $\tau = 0$: Man liest aus dieser Figur ab, daß der Kollapszeitpunkt verhältnismäßig sensibel auf Amplitudendifferenzen reagiert, (beachtet man, daß Rotverschiebungen hier linear aufgetragen sind, die Entfernungen aber reziprok zur Rotverschiebung zunehmen). Somit kann eine differenziertere Untersuchung des Materiekollaps (mit Spektren, die z.B. zwischen Störungen der Pekuliargeschwindigkeit und Dichtefluktuationen unterscheiden) wichtige beobachtungsrelevante Daten spürbar verändern. (Die "Zel'dovich-Approximation" hat in dieser Figur den Wert 1 für die relative Amplitude).

Fig.7b: Abhängigkeit von der relativen Phase bei $\kappa = 1$: Ebenfalls merklich hängt die Zeit des "PANCAKING" von der relativen Phase der Fluktuationen ab. Obwohl diese Abhängigkeit in einem Fourierspektrum mit Gaußscher Verteilung der Amplituden von geringerer Bedeutung ist als die relative Amplitudenabhängigkeit (bei hinreichend vielen Fouriermoden verschwindet die Abhängigkeit von der Phase), kann, für eine differenziertere Untersuchung, diese Abhängigkeit relevant werden, insbesondere wenn man den Zusammenhang zwischen der beobachteten Kohärenz des Pekuliargeschwindigkeitsfeldes und der großräumigen Verteilung des Dichtekontrasts studiert. Die "Zel'dovich-Approximation" entspricht in dieser Figur dem Wert 2π , da für identische Felder der Pekuliarfeldstärke und der Pekuliargeschwindigkeit die Phasendifferenz per Definition verschwindet; eine relative Phasendifferenz führt also zu einer Verzögerung des Materiekollaps. Dies wird anschaulich dadurch klar, wenn man sich Abweichungen von der "maximal korrelierten" Situation als kinematische Gegenbewegung der Teilchen vorstellt, die aber schließlich durch die dominierende gravitative Anziehung für hinreichend große Zeiten wieder kompensiert wird; dieses "Einfangen" der Teilchen gilt natürlich nur für Geschwindigkeiten, die klein gegen die Fluchtgeschwindigkeit sind.

ZC/A 1D



ZC/P 1D



FIGUR 8

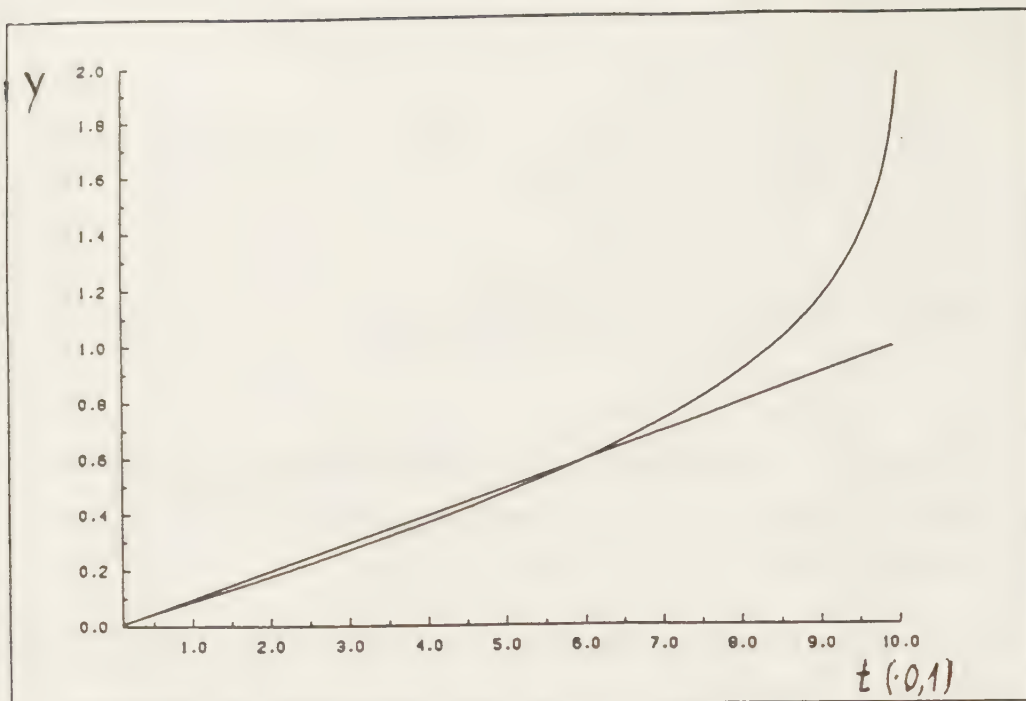
Nichtlineare Entwicklung des Dichtekontrasts für zwei Klassen strenger Lösungen, (vgl. III.1.).

Fig.8a: Das Verhalten der Umkehrfunktion des Wahrscheinlichkeitsintegrals $y = \text{inverf}(t)$, dargestellt im Vergleich zur linearen Zeitabhängigkeit $y = t$. Diese Funktion bestimmt die Zeitabhängigkeit der Lösungen des Kapitels III.1..

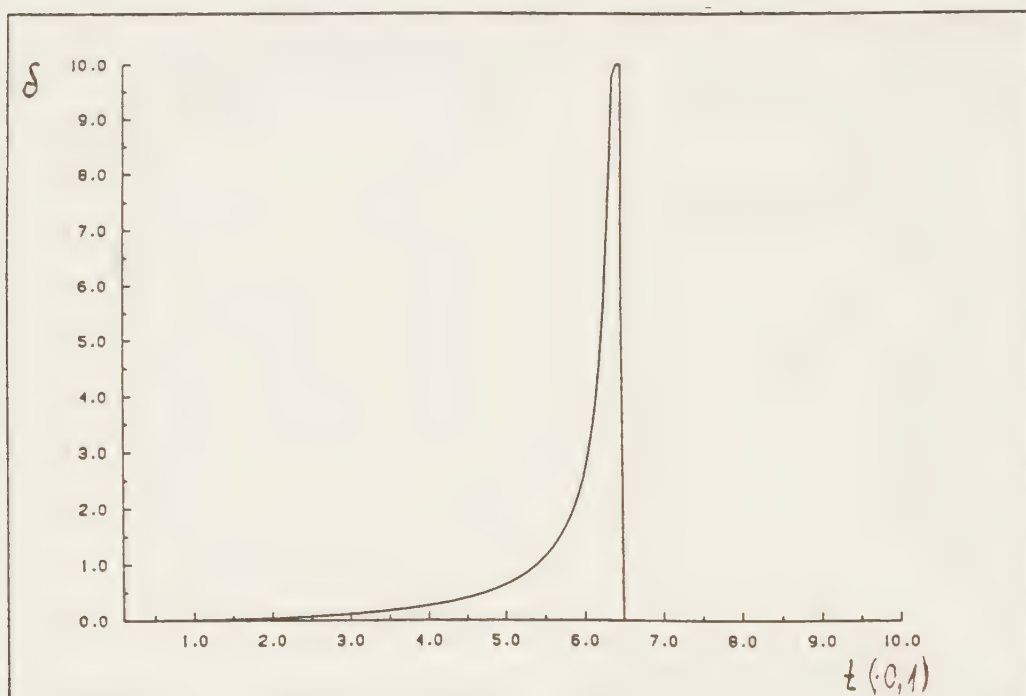
Fig.8b: Die Zeitabhängigkeit des Dichtekontrasts längs einer Trajektorie für die Lösung (65), vgl. III.1.(65f) ist dargestellt.

Fig.8c: Die Zeitabhängigkeit des Dichtekontrasts längs einer Trajektorie für die Lösung (67), vgl. III.1.(67e) ist dargestellt.

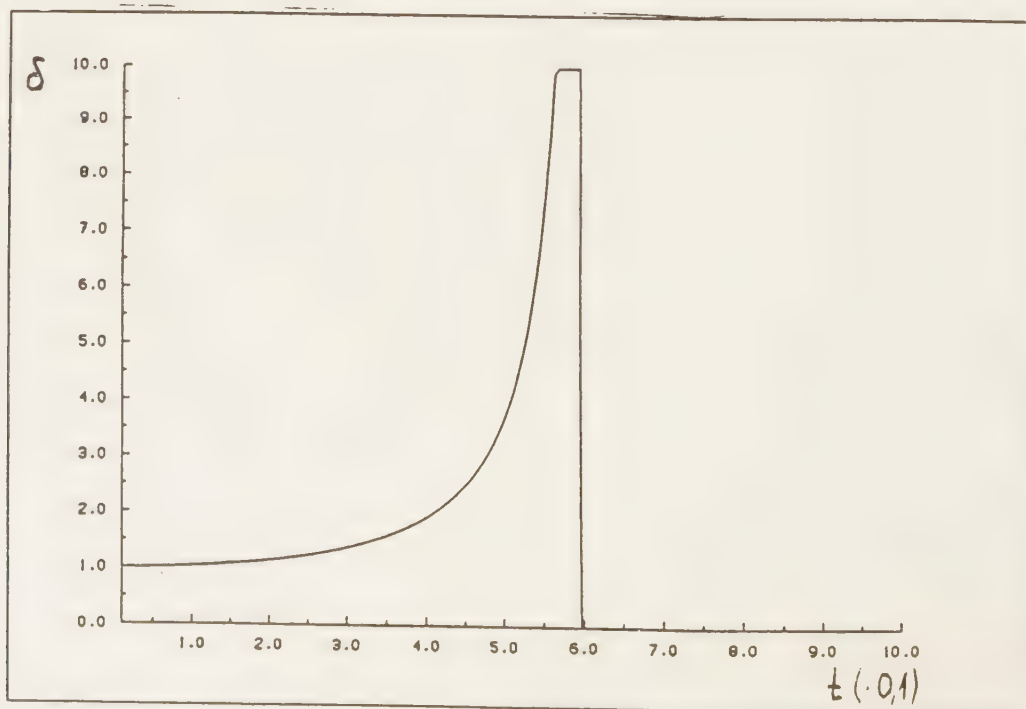
8a



8b



8c

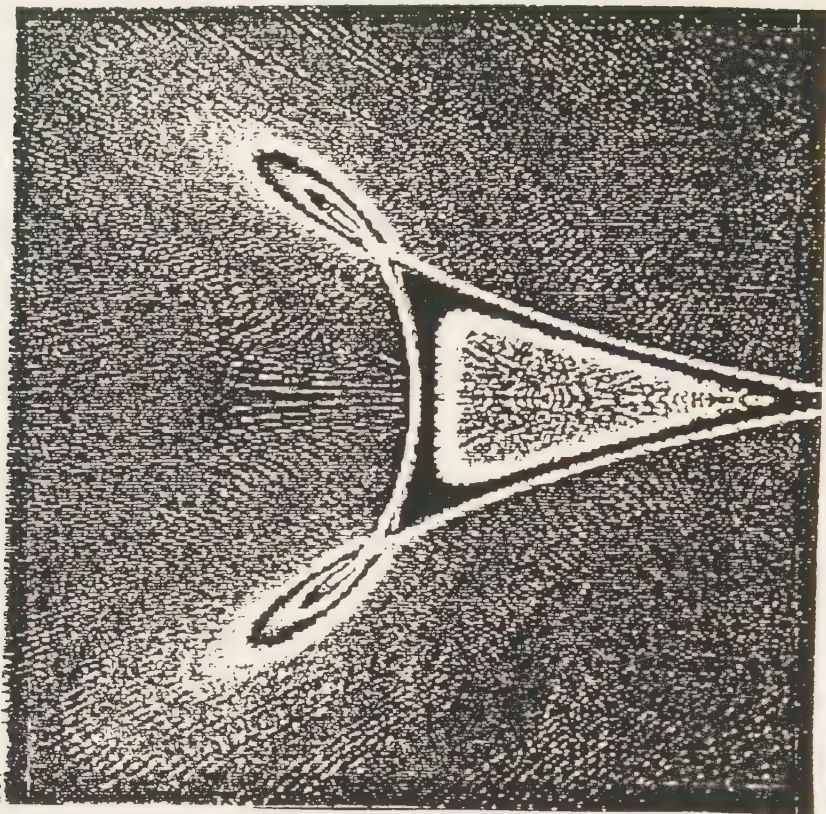


FIGUR 9

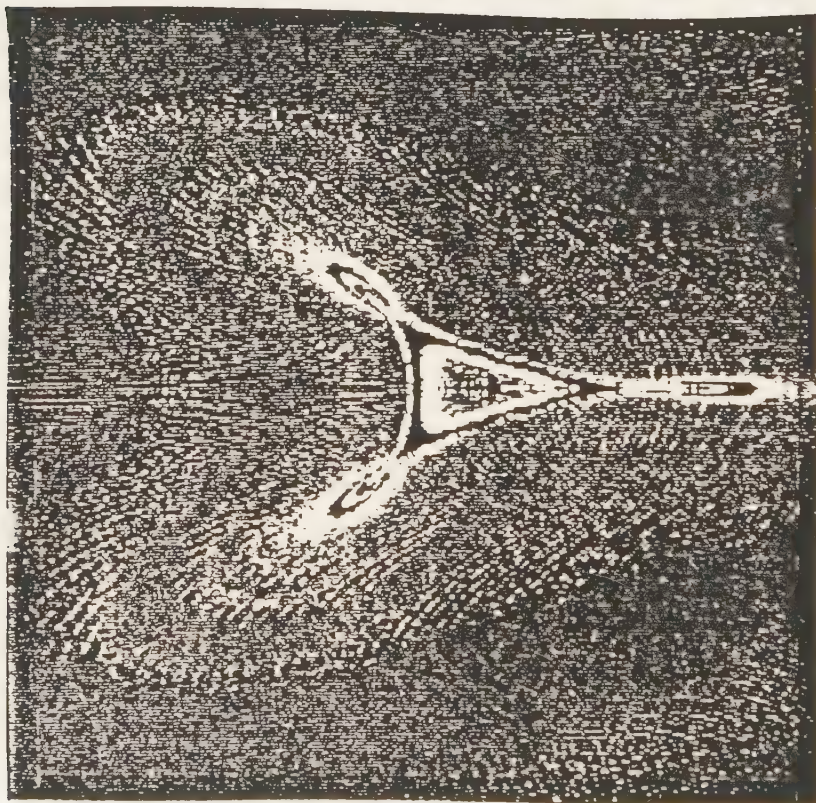
Dichtekontrast einer zweidimensionalen strengen Lösung, vgl. III.1. Gl. (65), speziell (65h,i).

Fig9a,b: Dargestellt ist der Dichtekontrast der Lösung (65f,i) für zwei aufeinanderfolgende Expansionszeiten im "Eulerschen Raum". Dieses Beispiel zeigt deutlich die Wirkung der Transformation des "Lagrange-Raums" auf den "Eulerschen Raum". Im "Lagrange-Raum" ist die Verteilung des Dichtekontrasts zylindrisch-symmetrisch, sie hat in der "Lagrangeschen Ebene" kreisförmige Dichtekonturen zu allen Zeiten. Die Bilder dieser Kreise im "Eulerschen Raum" sind asymmetrische Figuren mit drei "cusp"-Spitzen (Singularitäten vom Typ A_3). Die Figur (9a) zieht sich unter dem Einfluß der Gravitation zusammen (Fig.9b).

9a



9b



APPENDIX A

Die "Grundgleichungen" in dimensionsloser und skaliert Form; allgemeine Lösung für die Entwicklung eindimensionaler Inhomogenitäten sowie der Lösungsansatz des Teils II in den Fällen ($K = 0, K < 0, K > 0; \Lambda = 0$)

In einer von einigen Autoren gebrauchten Darstellung des Systems (13) werden alle relevanten Gleichungen des Kapitels II im folgenden aufgeführt. Ursprünglich wurde diese Darstellung dafür ausgearbeitet, um numerische Routinen, die in der Plasmaphysik entwickelt wurden, auf das betrachtete Problem selbstgravitierender Medien auf einem expandierenden Hintergrund anwendbar zu machen (vgl. Doroshkevich et al. 1980). Speziell ist der Wechsel der Zeitvariablen in der geschilderten Weise für das Auffinden von Lösungen der Gleichung (8b) für die nichtlineare Entwicklung von Störungen in "gekrümmten" Hintergrundmodellen, wie sich noch zeigen wird, entscheidend.

Für die Transformation der Variablen folgen wir einer Arbeit von Shandarin (1980) mit der Ausnahme, daß wir alle Größen mit dem Index "o" auf die Anfangszeit beziehen wollen, zu der das Störungsspektrum vorgegeben werden soll. Wir führen die folgenden dimensionslosen und für die Vereinfachung der Gleichungen geeignet skalierten Variablen ein:

$$\tilde{q}_i := q_i/q_0; \quad \tilde{u}_i := (u_i/u_0)a; \quad \tilde{w}_i := (w_i/w_0)a^3; \quad \tilde{\rho} := (\rho/\rho_{H_0})a^3. \quad (A1a)$$

Die neue Zeitvariable sei gegeben durch:

$$dT := \frac{1}{t_0} \frac{dt}{a^2(t)}, \quad (A1b)$$

In den Variablen (A1) nimmt das System (13) zusammen mit (12a) jetzt folgende Form an:

$$\tilde{u}_T + (\tilde{u} \cdot \nabla_{\tilde{q}}) \tilde{u} = \tilde{w} \quad (A2a)$$

$$\tilde{\rho}_T + \nabla_{\tilde{q}} \cdot (\tilde{\rho} \tilde{u}) = 0 \quad (A2b)$$

$$\nabla_{\tilde{q}} \times \tilde{w} = 0 \Rightarrow \tilde{w} =: -\nabla_{\tilde{q}} \tilde{\phi}; \quad \tilde{\phi} = (\phi/\phi_0) a^2 \quad (A2c)$$

$$\nabla_{\tilde{q}} \cdot \tilde{w} = -C_0 a (\tilde{\rho} - 1); \quad C_0 := 4\pi G \rho_{H_0} t_0^2 \quad (A2d)$$

$$\tilde{\rho} = (1 + \delta) \geq 0 \quad (A2e)$$

$$\frac{(a_T)^2}{a^4 t_0^2} + \text{const.} = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_{H_0}}{a} + \frac{\Lambda a^2}{3} \quad (A2f)$$

falls:

$$u_0 := \frac{q_0}{t_0}, \quad w_0 := \frac{u_0}{t_0}, \quad \phi_0 := w_0 q_0.$$

Für die das kosmologische Modell bestimmenden Parameter wählen wir $H_0 = H(t_0)$, $\Omega_0 = \Omega(t_0)$ und Λ , wobei Ω der Dichteparameter $\Omega = \frac{8\pi G \rho_H}{3H^2} = \frac{\rho_H}{\rho_H(\text{const.}=0; \Lambda=0)}$ ist. Wir legen fest, daß t_0 die Zeit der Vorgabe von Anfangsbedingungen ist, q_0 ist eine beliebige Längenskala. Wir betrachten in diesem Appendix den Fall $\Lambda = 0$.

Die gewählten Variablen haben den Vorteil, daß die Friedmannsche Differentialgleichung (A2f) die folgende einfache Lösung erhält:

$$a(T) = \frac{T_0^2 + K}{T^2 + K}; \quad a(T_0) = 1; K = 0, +1, -1 \text{ für } \Omega_0 = 1, \Omega_0 > 1, \Omega_0 < 1 \quad (A3a)$$

falls:

$$t_0^2 := \frac{4}{\Omega_0 H_0^2 (T_0^2 + K)}; \quad \rho_{H_0} := \frac{3}{8\pi G} \Omega_0 H_0^2; \quad \text{const.} := \frac{4K}{t_0^2}.$$

Die dimensionslose Zeit T ist negativ und wird in der "Big-Bang"-Singularität negativ unendlich (vgl. die Illustration in Shandarin (1980)). Aus (A3a) erhält man für den Dichteparameter:

$$\Omega(T) = \frac{T^2 + K}{T^2}. \quad (A3b)$$

Führt man die "Rotverschiebung" Z über $a =: \frac{1+Z_0}{1+Z}$ ein, so können wir Ω_0 und H_0 durch ihre Werte zum heutigen Zeitpunkt (Vergleich mit Beobachtungen!) folgendermaßen ausdrücken: *

$$\Omega_0 = \Omega|_{Z=0}(1+Z_0) \frac{T^2|_{Z=0}}{T_0^2} = \frac{\Omega|_{Z=0}(1+Z_0)}{1+\Omega|_{Z=0}Z_0}; \quad (A3c)$$

$$H_0 = H|_{Z=0}(1+Z_0) \frac{T_0}{T|_{Z=0}} = H|_{Z=0}(1+Z_0) \sqrt{1+\Omega|_{Z=0}Z_0}. \quad (A3d)$$

Die "Grundgleichungen" für die in Kapitel II diskutierte Lösungsklasse in den Variablen (A1):

Die Analoga der Gleichungen (18a,b) lauten **

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{w}} - h\tilde{w} &= C_0 a \tilde{u}; \quad \dot{\tilde{u}} = \tilde{w} \\ \Rightarrow \ddot{\tilde{w}} - 2h\dot{\tilde{w}} + (h^2 - h_T - C_0 a)\tilde{w} &= 0 \end{aligned} \quad (A4a)$$

$$\ddot{\tilde{u}} - h\dot{\tilde{u}} - C_0 a \tilde{u} = 0. \quad (A4b)$$

Die dimensionslosen Integralkurven $\tilde{F}(\tilde{X} := \frac{\tilde{X}}{q_0}, T)$ von $\tilde{u}$ sind definiert durch:

$$\dot{\tilde{F}} = \tilde{u}(\tilde{F}, T); \quad \tilde{F} := \tilde{F}/q_0. \quad (A5a)$$

Die Dichte $\tilde{\rho}$ ist gemäß (10b) gegeben durch:

$$\tilde{\rho} = \frac{1 + \overset{0}{\delta}}{\det(\tilde{F}_{i,k})} = \tilde{\rho}(\tilde{X}, T). \quad (A5b)$$

* Aus $H_0 = \frac{a_t}{a}|_{t_0}$ bekommen wir $T_0 = -3$ für $K = 0$, $T_0 = -\sqrt{\frac{K}{\Omega_0 - 1}}$ für $K \neq 0$.

** In diesem Appendix notiert ein Punkt den skalierten Lagrangeoperator $\tilde{D}_{\tilde{u}} := D_u(a^2 t_0)$, der in der $\{\tilde{q}_i\}$ -Darstellung folgendermaßen lautet: $\tilde{D}_{\tilde{u}} = \partial_T + \tilde{u} \cdot \nabla_{\tilde{q}}$; h ist die Funktion $\frac{a_T}{a}$, ein Komma notiert partielle Ableitung nach den $\tilde{X}_i$; $\tilde{C}^\alpha := \frac{\alpha}{q_0}$, $\tilde{C}^\beta := \frac{\tilde{\beta}}{q_0}$.

Wegen (A4b) lautet die allgemeine Form der Integralkurven $\tilde{\vec{F}}$:

$$\tilde{\vec{F}}(\tilde{\vec{X}}, T) = \tilde{\vec{X}} + \tilde{C}^\alpha(\tilde{\vec{X}})g^\alpha(T) + \tilde{C}^\beta(\tilde{\vec{X}})g^\beta(T) , \quad (A6a)$$

wobei die Funktionen $g = g^\alpha, g^\beta$ der folgenden linearen Gleichung genügen:

$$g_{TT} - C_0 a(g + 1) = 0.$$

Schließlich vereinfacht sich die Lagrangesche Form der Grundgleichungen (17) zu:

$$\begin{aligned} \epsilon_{pq} [j \frac{\partial(\tilde{F}_i, \tilde{F}_p, \tilde{F}_q)}{\partial(\tilde{X}_i, \tilde{X}_p, \tilde{X}_q)}] &= 0 \\ \epsilon_{abc} \frac{\partial(\tilde{F}_a, \tilde{F}_b, \tilde{F}_c)}{\partial(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3)} &= 2C_0 a \left(\frac{\partial(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3)}{\partial(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3)} - \overset{\circ}{\tilde{\rho}} \right). \end{aligned} \quad (A7)$$

Beispiele für Lösungsansätze des Teils II; *allgemeine Lösungen* für die Entwicklung eindimensionaler Inhomogenitäten in den Fällen $\{K = 0, K < 0, K > 0; \Lambda = 0\}$:

Setzt man (A3a) in (A4b) ein, so erhalten wir Differentialgleichungen vom Typ der "Legendreschen Differentialgleichung" (für die oben genannten Fälle):

$$(T^2 + K)\tilde{u}_{TT} + 2T\tilde{u}_T - \nu(\nu + 1)\tilde{u} = 0, \quad \nu = 2. \quad (A8a)$$

Für (A6b) bekommen wir:

$$(T^2 + K)g_{TT} - 6(g + 1) = 0. \quad (A8b)$$

Man erkennt jetzt deutlich den Vorteil der eingeführten modellabhängigen Zeitvariablen: Auch für $K \neq 0$ reduziert sich das Problem auf eine überschaubare lineare Differentialgleichung, deren Lösungen man kennt; (man vergleiche z.B. die Arbeit von Zentsova & Chernin (1980), in der das Problem $K \neq 0$ als der Lösung nicht zugänglich erklärt wird).

Durch den aufgedeckten Zusammenhang der eingeschränkten nichtlinearen Gleichungen, die sich für $\tilde{u}$ auf (A8a) reduzieren, und den linearisierten Gleichungen in II.4. ist das Problem der Lösung der Gleichung (A8a) auf die Lösung für die Entwicklung der linearisierten Störungen verschoben. Letzteres wurde bereits gelöst (vgl. z.B. Groth & Peebles (1975)). Shandarin (1980), der den "Zel'dovich-Formalismus" auf diese Lösungen der linearen Theorie anwendet, erhält so approximative Ansätze, die den Integralen der eingeschränkten nichtlinearen Gleichungen (A8a) entsprechen.

Wir geben nun die Lösungen von (A8a) ohne Rückgriff auf die Lösungen der linearen Theorie in den hier eingeführten Variablen an:

Die Lösungen für die Fälle ($K \neq 0; \Lambda = 0$) können mit Hilfe des Fundamentalsystems (vgl. Formelsammlungen)

$$P_2(T) = \frac{1}{2}(3T^2 - 1), \quad Q_2(T) = \frac{1}{2}P_2(T) \ln \left(\frac{T+1}{T-1} \right) - \frac{3}{2}T$$

ausgedrückt werden. Dabei ist $\tilde{u}(T)$ die Lösung im Fall ($K > 0; \Lambda = 0$) und $\tilde{u}(iT)$ im Fall ($K < 0; \Lambda = 0$). Die beiden Moden g^α und g^β sind gegeben durch:

$$g^\alpha = \frac{1}{b_0^\alpha} (T(T^2 + K)m_k(T) - (T^2 + \frac{2}{3}K)) - 1, \quad (A9a)$$

$$g^\beta = \frac{1}{b_0^\beta} (T(T^2 + K) - 1). \quad (A9b)$$

Die Normierungen $b_0 = g(T_0) + 1$ sind eingeführt worden, damit $g(T_0) = 0$ gilt; die Funktionen $m_k(T)$ sind je nach Modell verschieden:

$$m_{(-1)}(T) := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{T+1}{T-1} \right) = \text{Arcth}(T) \quad (A9c)$$

$$m_{(0)}(T) := \frac{1}{T} + \frac{1}{T^5}$$

$$m_{(+1)}(T) := \frac{i}{2} \ln \left(\frac{iT+1}{iT-1} \right) - \pi = \text{arcctg}(T) - \pi.$$

Asymptotisch, für $T \rightarrow -\infty$, verhalten sich die Lösungen für $K \neq 0$ in beiden Fällen wie die Moden im flachen Modell:

$$g^\alpha = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-2} - 1 \quad \text{und} \quad g^\beta = \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 - 1.$$

Schließlich wollen wir noch die Vektorfunktionen $\vec{C}^\alpha$ und $\vec{C}^\beta$ in (A6a) durch *Anfangsdaten* für die Störungen der Geschwindigkeit und der Feldstärke ausdrücken. Dies erlaubt das Studium der Entwicklung von Inhomogenitäten bei separater Vorgabe zweier Anfangsfelder, (vgl. Diskussion und Auswertung in II.7. und II.8.):

Wir drücken zunächst die Pekuliarfelder $\tilde{U}(\tilde{X})$ und $\tilde{W}(\tilde{X})$ durch $\vec{C}^\alpha$ und $\vec{C}^\beta$ aus:

$$\begin{aligned} \tilde{U} = & \frac{\vec{C}^\alpha}{b_0^\alpha} [(3T_0^2 + K)m_k(T_0) + T_0(T_0^2 + K)\dot{m}_k(T_0) - 2T_0] \\ & + \frac{\vec{C}^\beta}{b_0^\beta} [(3T_0^2 + K)] \end{aligned} \quad (A10a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{W} = & \frac{\vec{C}^\alpha}{b_0^\alpha} [6T_0 m_k(T_0) + (6T_0^2 + 2K)\dot{m}_k(T_0) + T_0(T_0^2 + K)\ddot{m}_k(T_0) - 2] \\ & + \frac{\vec{C}^\beta}{b_0^\beta} [6T_0]. \end{aligned} \quad (A10b)$$

Wir setzen (A9c) in (A10) ein und erhalten explizite Beziehungen der (für ebensymmetrische Inhomogenitäten unabhängig vorgebbaren) Felder $\vec{C}^\alpha$ und $\vec{C}^\beta$ zu den Störungsfeldern:

– Für $K = 0$:

$$\vec{C}^\alpha = -\frac{T_0}{5}\tilde{U} + \frac{T_0^2}{10}\tilde{W} = \frac{3}{5}\tilde{U} + \frac{9}{10}\tilde{W} \quad (A11a)$$

$$\vec{C}^\beta = \frac{T_0}{5}\tilde{U} + \frac{T_0^2}{15}\tilde{W} = -\frac{3}{5}\tilde{U} + \frac{3}{5}\tilde{W}. \quad (A11b)$$

– Für $K \neq 0$:

$$\vec{C}^\alpha = b_0^\alpha (T_0^2 + K) \left\{ \frac{3}{2} T_0 \vec{U} - \frac{1}{4} (3T_0^2 + K) \vec{W} \right\} \quad (A11c)$$

$$\begin{aligned} \vec{C}^\beta = b_0^\beta (T_0^2 + K) & \left\{ -\frac{3}{2} \left(m_k(T_0) T_0 - \frac{(T_0^2 + (2/3)K)}{(T_0^2 + K)} \right) \tilde{U} \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} (m_k(T_0)(3T_0^2 + K) - 3T_0) \tilde{W} \right\}. \end{aligned} \quad (A11d)$$

Die Zusammenfassung II.5. stellt diese Relationen noch mit Hilfe der “Rotverschiebung” Z (vgl. A3) dar; in den Fällen $K \neq 0$ sind dort die (von den Modellparametern abhängigen) Zahlen T_0 in folgender Weise mit einem Parameter γ , (bezogen auf heutige Werte ($Z = 0$)), verknüpft worden:

$$T_0^2 + K = \frac{K\Omega_0}{\Omega_0 - 1} = (1 + Z_0)\gamma; \quad \gamma := \frac{K\Omega|_{Z=0}}{\Omega|_{Z=0} - 1}. \quad (A12)$$

APPENDIX B

In diesem Appendix wird eine Klasse dreidimensionaler inhomogener Lösungen des Systems (1) vorgestellt. Diese Klasse ist das Resultat einer dreidimensionalen Verallgemeinerung der streng eindimensionalen Lösung des Systems (1). Die folgende Darlegung ist eine Kurzfassung eines bereits publizierten Artikels (Buchert, Götz 1987).

In einer räumlichen Dimension reduziert sich das System (1) auf die folgenden zwei Gleichungen an die Dichte $\rho(x_1, t)$, die Geschwindigkeit $v_1(x_1, t)$ und die Gravitationsfeldstärke $g_1(x_1, t)$:

$$\rho_t + (\rho v_1)_x = 0, \quad (B1a)$$

$$g_{1x} = -4\pi G\rho. \quad (B1b)$$

Einsetzen von (B1a) ind (B1b) ergibt, daß die Lagrangesche Zeitableitung der Feldstärke höchstens zeitabhängig ist:

$$g_{1t} + v_1 g_{1x} = \dot{g}_1 = \beta(t); \quad (B1c)$$

(β ist beliebig). Die sogenannte "Heckmann-Schücking"-Kovarianz des Gleichungssystems (1) (Heckmann & Schücking 1955, 1956) impliziert, daß, o.E.d.A., $\beta = 0$ gewählt werden kann.

Dieses Resultat läßt sich auch einfach aus der Lagrangeschen Form des Gleichungssystems (8) gewinnen. Das System reduziert sich für $f_2 = X_2, f_3 = X_3, \bar{f}_2 = 0, \bar{f}_3 = 0$ auf eine Gleichung an die nicht-triviale Komponente der Integralkurve:

$$\bar{f}_{1,1} = -4\pi G\bar{\rho} = G_{1,1}, \quad (B2a)$$

woraus sich sofort o.E.d.A. $g_1 = \bar{f}_1 = g_1(x_1, 0) =: G_1$ ergibt. Die Integralkurven von v_1 lauten, ($V_1 := v_1(x_1, 0)$):

$$x_1 = f_1(X_1, t) = X_1 + V_1(X_1)t + G_1(X_1)\frac{t^2}{2}. \quad (B2b)$$

Anmerkung:

Da diese Lösung *allgemein* ist, d.h., sie läßt zwei frei vorgebbare Anfangsdaten zu, ist auch die (eindimensionale) homogene Lösung enthalten. Für eindimensionale homogene Deformationen $f_1 = s(t)X_1$ ergibt sich aus (B2a):

$$\bar{s} = -4\pi G\rho_{H_0} = G_{H1,1} . \quad (B3)$$

Der eindimensionale Hintergrund folgt einem gleichförmig beschleunigten Expansionsgesetz. Diese Zeitabhängigkeit des Hintergrunds überträgt sich auch auf die unten vorgestellte dreidimensionale Verallgemeinerung der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Aus diesem Grund lassen sich diese Lösungen nicht als Superposition eines dreidimensionalen Friedmann-Hintergrunds und PekuliARBewegung repräsentieren. (Dies wurde in Kapitel II durch einen a priori-Ansatz ermöglicht; die dort konstruierten Lösungen haben als Folge der Superpositionsforderung andere *dynamische* Eigenschaften. Aufgrund der Verallgemeinerung (quasi-)eindimensionaler Lösungen sind die *kinematischen* Eigenschaften der PekuliARBewegung relativ zur Expansion des Hintergrunds dieser Klasse und der unten vorgestellten Klasse, (die als singulärer Fall (für $a = 1, \Lambda = 0$, vgl.(14)) aufgefaßt werden kann) vergleichbar).

Die Motivation einer dreidimensionalen Verallgemeinerung der gleichförmig beschleunigten Bewegung der Flüssigkeits- "teilchen" ergab sich aus der speziellen Form der Grundgleichungen, (vgl. II.2.), die ich zunächst unter Verzicht auf die spezielle Form der Lösung als Superposition von Hintergrund und PekuliARBewegung, (welche das Auffinden von Lösungen formal kompliziert), gewonnen habe, vgl. Gl. (18*). Die Gleichung (18*) besagt, daß in drei Dimensionen die Gravitationsfeldstärke nicht nach Betrag und Richtung erhalten bleibt, sondern durch Terme mit nur räumlichen Ableitungen ausdrückbar ist. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß der Lösungsansatz (bei Vernachlässigung des Terms $\vec{R}_1^*$, vgl. II.3., eine *vektorielle* Erhaltung der Feldstärke fordert. Eine Verallgemeinerung der streng eindimensionalen Lösung hätte nur die Forderung der Erhaltung des Betrags der Feldstärke implizieren können. (Man kann zeigen, daß die Entwicklungsgleichung für den Betrag der Feldstärke nicht entsprechend der Grundgleichung (18*) durch Terme mit nur räumlichen Ableitungen ausgedrückt werden kann.) Dazu sei darauf hingewiesen, daß

allgemeinere vektorielle Erhaltungsgrößen in III.1. vorgestellt werden. *

Wir stellen nun die Lösungsklasse vor. Die Forderung an Lösungen des Euler-Poisson-Systems ist die vektorielle Erhaltung der Gravitationsfeldstärke:

$$\dot{\vec{g}} = 0. \quad (B4a)$$

Die Integralkurven des Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}$ ergeben sich daraus als Bahnen einer gleichförmig beschleunigten Bewegung im dreidimensionalen Raum:

$$\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \vec{V}(\vec{X})t + \vec{G}(\vec{X})\frac{t^2}{2}. \quad (B4b)$$

Wir geben nun die einschränkenden Gleichungen an, die durch Einsetzen des Ansatzes (B4b) in das Euler-Poisson-System in Lagrangescher Darstellung (System (6), $\Lambda = 0$) folgen. Es resultieren 17 Gleichungen durch die Forderung des Verschwindens der Koeffizientenfunktionen der Potenzen in t : Aus der Wirbelfreiheit der Gravitationsfeldstärke (6a,b,c) folgt; $((i,j,k)$ paarweise verschieden, keine Summation über wiederholt auftretende Indizes hier!):

$$t^0 : (G_k, \overset{\circ}{f}_k, \overset{\circ}{f}_i) = (G_j, \overset{\circ}{f}_i, \overset{\circ}{f}_j) \quad (B5a)$$

$$t^1 : (G_k, V_k, \overset{\circ}{f}_i) + (G_k, \overset{\circ}{f}_k, V_i) = (G_j, \overset{\circ}{f}_i, V_j) + (G_j, V_i, \overset{\circ}{f}_j) \quad (B5b)$$

$$t^2 : (G_k, V_k, V_i) + \frac{1}{2}(G_k, \overset{\circ}{f}_k, G_i) = (G_j, V_i, V_j) + \frac{1}{2}(G_j, G_i, \overset{\circ}{f}_j) \quad (B5c)$$

$$t^3 : (G_k, V_k, G_i) = (G_j, G_i, V_j). \quad (B5d)$$

Aus der Quellgleichung des Gravitationsfeldes (6d, $\Lambda = 0$) folgt; hier Summation über wiederholt auftretende Indizes; $(\epsilon_{ijk} = \epsilon_{[ijk]}, \epsilon_{123} = +1)$:

* Eine in diesem Zusammenhang interessante Eigenschaft der Vektoren $\vec{\Psi}_1$ und $\vec{\Omega}_1$ (vgl. III.1.) ist, daß deren inneres Produkt dem Betrag der Feldstärke proportional ist, was der Leser durch Ausmultiplizieren verifizieren kann.

$$t^0 : \epsilon_{ijk}(G_i, \overset{\circ}{f}_j, \overset{\circ}{f}_k) = -4\pi G \overset{\circ}{\rho} \quad (B6a)$$

$$t^1 : \epsilon_{ijk}((G_i, \overset{\circ}{f}_j, V_k) + (G_i, V_j, \overset{\circ}{f}_k)) = 0 \quad (B6b)$$

$$t^2 : \epsilon_{ijk}((G_i, \overset{\circ}{f}_j, G_k) + (G_i, V_j, V_k)) = 0 \quad (B6c)$$

$$t^3 : \epsilon_{ijk}(G_i, G_j, V_k) = 0 \quad (B6d)$$

$$t^4 : (G_1, G_2, G_3) = 0. \quad (B6e)$$

Es ergeben sich aus (B5) aus jeder Gleichung drei, aus (B6) insgesamt fünf Gleichungen: (B5a) und (B6a) sind intrinsisch. Sie fordern die Gültigkeit der Poissongleichung zur Zeit $t = 0$. Diese Gleichungen zeigen auch den Vorteil der Lagrangeschen Form (6) des Euler-Poisson-Systems: Die Formulierung mit Hilfe von Funktionaldeterminanten legt für den Ansatz (B4b) sofort funktionale Abhängigkeiten der Anfangsfelder fest.

Wir beweisen nun folgendes Lemma:

Lemma 1: Die 17 Gleichungen (B5,6) für die sechs Funktionen V_i, G_i sind dann und nur dann erfüllt, wenn folgende funktionale Abhängigkeit besteht, (der Strich notiert die Ableitung nach dem jeweiligen Argument):

$$V_1 = F(G_1), V_2 = H(G_1), V_3 = K(G_1); \quad (B7a)$$

$$G_1 = E(X_1 + A' X_2 + B' X_3), G_2 = A(G_1), G_3 = B(G_1). \quad (B7b)$$

Fordert man die Wirbelfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes, so ergibt sich zusätzlich folgende Abhängigkeit der zunächst beliebigen Funktionen F, H, K, A und B :

$$F' A' = H', F' B' = K'. \quad (B7c)$$

Beweis von Lemma 1: Die Gleichung (B6e) besagt, daß eine Komponente der Feldstärke lokal durch die anderen beiden ausgedrückt werden kann:

$$G_3 = \Psi_0(G_1, G_2). \quad (B8)$$

Ψ_0 ist beliebig. Addiert man Linearkombinationen der drei Gleichungen (B5d) zu (B6d), so erhalten wird unter Benutzung von (B8):

$$(G_1, G_2, V_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (B9)$$

Aus (B9) folgen sofort die folgenden drei funktionalen Beziehungen zwischen G_1, G_2, V_i , für die wiederum angenommen wird, daß sie z.B. nach V_i aufgelöst werden können:

$$V_i = \Psi_i(G_1, G_2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (B10)$$

Die Funktionen Ψ_i sind beliebig. (Wir können ebenso o.E.d.A. nach anderen Komponenten auflösen, die folgenden Überlegungen werden dadurch nicht prinzipiell anders; die Auflösung ist lokal stets nach einer der Komponenten möglich).

Addiert man Linearkombinationen von (B5c) zu (B6c), so ergeben sich zusammen mit (B8), (B9) und (B10) die folgenden drei Gleichungen:

$$(G_1, G_2, \overset{\circ}{f}_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (B11)$$

Aus (B11) folgt für $i = 3$ unter Berücksichtigung von (B5a):

$$G_{1,1}G_{2,2} - G_{1,2}^2 = 0 \quad (B12)$$

mit der lokalen Lösung:

$$G_2 = A(G_1). \quad (B13a)$$

A ist beliebig.

(B8) und (B10) lassen sich dann wie folgt schreiben:

$$G_3 = B(G_1), \quad V_1 = F(G_1), \quad V_2 = H(G_1), \quad V_3 = K(G_1), \quad (B13b, c, d, e)$$

B, F, H, K sind beliebig.

Die verbleibenden Gleichungen (B5b) und (B6b) sind identisch erfüllt, wenn (B13) gilt.

Die Gleichungen (B5a) implizieren unter Benutzung von (B13a,b):

$$A'(G_1) G_{1,1} = G_{1,2}, \quad (B14a)$$

$$B'(G_1) G_{1,1} = G_{1,3}. \quad (B14b)$$

Die Differentialgleichungen (B14) sind äquivalent zu

$$\frac{dG_1}{dX_2} = 0, \quad \frac{dG_1}{dX_3} = 0, \quad (15a, b)$$

auf den Kurven

$$\frac{dX_1}{dX_2} = -A', \quad \frac{dX_1}{dX_3} = -B'. \quad (16a, b)$$

Da G_1 auf diesen Kurven konstant ist, läßt sich (B16) einfach integrieren:

$$X_1 + A'X_2 + B'X_3 \equiv \xi = \text{const.} \quad (B17)$$

Damit ist G_1 eine beliebige Funktion von ξ :

$$G_1 = E(\xi). \quad (B18)$$

Die Einschränkungen der Funktionale (B7c) ergeben sich durch Einsetzen von (B7a) in $\nabla_X \times \vec{V} = 0$. Ein bekanntes Theorem von Cauchy & Lagrange garantiert bei dieser Forderung das Verschwinden der Rotation zu allen Zeiten. Q.e.d.

Die Formulierung des Lemma 1 der lokalen Lösung der Gleichungen (B5) und (B6) vermeidet explizit den Gebrauch des Gravitationspotentials $\overset{\circ}{\Phi}$, dessen Existenz durch die Wirbelfreiheit von $\vec{G}$ garantiert ist:

$$\vec{g}(\vec{X}, t) = \vec{g}(\vec{X}, 0) = -\nabla_X \overset{\circ}{\Phi}(\vec{X}). \quad (B19)$$

Die folgende alternative Formulierung des Lemma 1 bezieht sich explizit auf das Potential:

Korrolar zu Lemma 1: Die Gleichungen (B7b) sind genau dann erfüllt, wenn das in (B19) definierte Potential bestimmt ist durch das System von Gleichungen:

$$\overset{\circ}{\Phi}_{,2,2}\overset{\circ}{\Phi}_{,3,3} - \overset{\circ}{\Phi}_{,2,3}^2 = 0, \quad (B20a)$$

$$\overset{\circ}{\Phi}_{,3,3}\overset{\circ}{\Phi}_{,1,1} - \overset{\circ}{\Phi}_{,3,1}^2 = 0, \quad (B20b)$$

$$\overset{\circ}{\Phi}_{,1,1}\overset{\circ}{\Phi}_{,2,2} - \overset{\circ}{\Phi}_{,1,2}^2 = 0; \quad (B20c)$$

eine der drei Gleichungen ist redundant. Die funktionalen Beziehungen zu den Geschwindigkeitskomponenten lauten für $G_1 = -\overset{\circ}{\Phi}_{,1}$ entsprechend denen des Lemma 1.

Lemma 2: Die allgemeine lokale Lösung der überbestimmten Gleichungen (B20) für $\overset{\circ}{\Phi}$ ist gegeben durch:

$$\overset{\circ}{\Phi} = \alpha X_1 + A(\alpha)X_2 + B(\alpha)X_3 + C(\alpha), \quad (B21a)$$

$$0 = X_1 + A'(\alpha)X_2 + B'(\alpha)X_3 + C'(\alpha). \quad (B21b)$$

$A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)$ sind beliebige Funktionen von $\alpha := \overset{\circ}{\Phi}_{,1}$.

Beweis von Lemma 2: Die Gleichungen (B21) sind eine Erweiterung der Darstellung von Lösungen der Gleichung $Z_{xx}Z_{yy} - Z_{xy}^2 = 0$ für Flächen $Z(x, y)$ mit verschwindender Gaußkrümmung, wie sie Courant und Hilbert (1968, Bd.II, S.6) angeben.

Man hat zu zeigen, daß die Hyperflächen $\overset{\circ}{\Phi}$, die durch (B21) gegeben sind, eine Darstellung für jede lokale Lösung der Gleichungen (B20) sind. Die Gleichungen (B20) implizieren die Existenz von Funktionen A und B, so daß

$$\overset{\circ}{\Phi}_{,2} = A(\overset{\circ}{\Phi}_{,1}), \quad (B22a)$$

$$\overset{\circ}{\Phi}_{,3} = B(\overset{\circ}{\Phi}_{,1}). \quad (B22b)$$

gilt. Wir definieren eine Funktion C durch:

$$\begin{aligned} C &:= \overset{\circ}{\Phi} - \overset{\circ}{\Phi}_{,1}X_1 - \overset{\circ}{\Phi}_{,2}X_2 - \overset{\circ}{\Phi}_{,3}X_3 \\ &= \overset{\circ}{\Phi} - \alpha X_1 - A(\alpha)X_2 - B(\alpha)X_3. \end{aligned} \quad (B23)$$

Dann zeigen wir, daß C nur funktional von α abhängt: Die notwendige und hinreichende Bedingung für zwei Funktionen C und α , funktional abhängig zu sein, ist das Verschwinden aller Unterdeterminanten der Matrix:

$$\begin{pmatrix} C_{,1} & C_{,2} & C_{,3} \\ \alpha_{,1} & \alpha_{,2} & \alpha_{,3} \end{pmatrix}, \quad (B24)$$

i.e.:

$$C_{,2}\alpha_{,3} - C_{,3}\alpha_{,2} = 0, \quad (B25a)$$

$$C_{,1}\alpha_{,3} - C_{,3}\alpha_{,1} = 0, \quad (B25b)$$

$$C_{,1}\alpha_{,2} - C_{,2}\alpha_{,1} = 0. \quad (B25c)$$

Setzt man (B23) in (B25) ein, dann sieht man, daß (B25) stets erfüllt ist für jedes $\overset{\circ}{\Phi}$, das den Gleichungen (B22) genügt.

Da C nur von α abhängt, ergibt sich aus (B23):

$$d\overset{\circ}{\Phi} = \alpha dX_1 + A dX_2 + B dX_3 + (X_1 + A'X_2 + B'X_3 + C') d\alpha, \quad (B26)$$

was wiederum impliziert:

$$0 = X_1 + A'X_2 + B'X_3 + C'. \quad (B27)$$

(B23) und (B27) sind identisch mit (B21a) und (B21b). (B27) ist identisch mit (B18), wenn man $-C'(\alpha) = E^{-1}(\alpha)$ setzt.

Anmerkung:

Für Potentialströmungen erfüllt das Geschwindigkeitspotential S Gleichungen entsprechend den Gleichungen (B20). Die allgemeine lokale Lösung von S läßt sich analog zu (B21) in Abhängigkeit desselben Parameters α angeben, vgl. Buchert & Götz 1987.

Wir geben nun die Lösung in der Form eines Satzes an:

Satz : Die Lösung für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \dot{\vec{f}}(\vec{X}, t)$, die Gravitationsfeldstärke $\vec{g} = \vec{f}(\vec{X}, t)$ und die Dichte $\rho = 1/(\det(f_{i,k}))$ ist durch die folgenden Integralkurven $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}, t)$ des Geschwindigkeitsfeldes bestimmt:

$$x_1 = X_1 + Ft - \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad (B27a)$$

$$x_2 = X_2 + Ht - \frac{1}{2} A t^2, \quad (B27b)$$

$$x_3 = X_3 + Kt - \frac{1}{2} B t^2. \quad (B27c)$$

Die Dichte lautet explizit:

$$\rho = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{1 + F' \overset{\circ}{\rho} t - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\rho} t^2}, \quad (B28a)$$

$$\overset{\circ}{\rho} = \frac{-(1 + A'^2 + B'^2)}{A''X_2 + B''X_3 + C''}. \quad (B28b)$$

Die Funktionen A,B,C,F,H,K sind bestimmt durch:

$$H' = F' A', \quad (B29a)$$

$$K' = F' B', \quad (B29b)$$

$$0 = X_1 + A'X_2 + B'X_3 + C'. \quad (B29c)$$

Beweis des Satzes: Der Beweis folgt aus *Lemma 1 u. 2.*

Eine spezielle Lösung erhält man durch Wahl der freien Funktionen A, B, C, F, sowie durch Auflösung von (B29c) nach $\alpha(X_1, X_2, X_3)$; die Funktionen H und K sind durch (B29a,b) bestimmt. Elimination von $\tilde{X}$ invertiert die Transformation von Eulerschen in Lagrangesche Koordinaten und führt auf die Eulersche Darstellung der Lösung, vgl. die numerische Behandlung dieser Transformation in Kapitel II, (II.8.). Um physikalisch sinnvolle Lösungen zu erhalten, muß die Dichte für alle X_i positiv sein. Das verlangt eine Wahl von A, B, C so, daß

$$A''X_2 + B''X_3 + C'' < 0 \quad (B30)$$

gilt. Dies ist möglich im eindimensionalen Fall. Daher können die 3D-Lösungen diese Eigenschaft zumindest in einer kleinen Nachbarschaft der Untermannigfaltigkeit im (A, B, C)-Raum haben, die die eben-symmetrische Lösung mit $\overset{\circ}{\rho} \geq 0$ erzeugt. Wir bemerken noch, daß die dargestellte 3D-Lösung die allgemeine 1D-Lösung als Unterklasse enthält: Für $V_2 = V_3 = 0 \Leftrightarrow H' = K' = 0 \Leftrightarrow A' = B' = 0$ sind nur noch C und F frei wählbar. Aus (B29c) folgern wir, daß α eine Funktion von X_1 ist. Damit sind

$$\overset{\circ}{\rho} = \frac{-1}{C''} \quad \text{und} \quad v_1 = F$$

beliebige Funktionen von X_1 , was die maximal mögliche Freiheit in der Wahl der Anfangsbedingungen im eindimensionalen Fall darstellt.

Ich verweise für die Diskussion dieser Lösung, die sich im wesentlichen auf die kinematischen Eigenschaften beschränkt, auf unseren Artikel (Buchert & Götz 1987). Die wichtigste Eigenschaft ist, daß die Bewegung des Mediums durch *lokal eindimensionale* Kontraktionen erzeugt wird. Diese Eigenschaft wurde im Zusammenhang mit der Lösungsklasse des Kapitels II auch für die PekuliARBewegung relativ zur Expansion des Hintergrunds festgestellt, (vgl. II.6.). Die hier vorgestellte Klasse läßt spezielle *rotierende Flüsse* zu. Diese sind jedoch "artifizuell" in dem Sinn, daß die Rotation des Mediums die lokale Eindimensionalität der Bewegung nicht beeinflußt; es gibt zwar zwei nicht-verschwindende Eigenwerte, sie unterscheiden sich aber nur durch ihr Vorzeichen.

APPENDIX C

Beweis des "Extrapolationstheorems" und Bemerkungen zu den "nichtlinearen Restgliedern"

Betrachtet man die Gleichungen (18), so wird klar, daß man durch die Spezialisierung der *nichtlinearen Restglieder* $\vec{R}_1$ und $\vec{R}_2$ Einschränkungen an die Anfangsbedingungen erhält. Man erhält eine Klasse von Lösungen gerade weil die Terme $\vec{R}_1$ und $\vec{R}_2$ nur räumliche Ableitungen enthalten. Daß diese Einschränkung der Nichtlinearitäten eine nicht-triviale Klasse von Anfangsbedingungen zuläßt, wird im folgenden gezeigt.

Wir illustrieren die Prozedur der Bestimmung der Zwangsbedingungen (welche schon in II.4. als noch fehlender Teil des Beweises des "Extrapolationstheorems" skizziert wurde) zunächst etwas ausführlicher im zweidimensionalen Fall und geben dann das Resultat in drei Dimensionen an. Der Einfachheit halber benutzen wir die in Appendix A abgeleitete dimensionslose und geeignet skalierte Darstellung des Systems (A2); dies ändert an der Form der Zwangsbedingungen prinzipiell nichts, da die Skalierung mit nur zeitabhängigen Funktionen die räumlichen Einschränkungen der Anfangsdaten nicht beeinflußt.

Die Funktionaldeterminante dreier Funktionen f_1, f_2 und f_3 , welche von Lagrangeschen Koordinaten abhängen, sei im folgenden durch (f_1, f_2, f_3) abgekürzt.

Der zweidimensionale Fall:

In zwei Dimensionen reduzieren sich die Gleichungen (A7) auf die folgenden zwei Bedingungen an die inhomogene Deformation $\vec{F}$:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_1) + (\vec{F}_2, \vec{F}_2) = 0 \quad (R)$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) - (\vec{F}_2, \vec{F}_1) = C_0 a((\vec{F}_1, \vec{F}_2) - \overset{0}{\rho}). \quad (D)$$

Setzt man den Ansatz (A6) in der Form

$$\tilde{\tilde{F}}_i = C_0 \ a \ (\tilde{F}_i - \overset{\circ}{F}_i + C_i^\alpha + C_i^\beta), \overset{\circ}{F}_i =: \tilde{X}_i, \ i = 1, 2 \quad (C1)$$

in das Gleichungssystem (A7, 2D) ein, so erhalten wir sofort *:

aus (R):

$$\begin{aligned} & \left\{ \kappa \left[\left(\tilde{W}_1, \overset{\circ}{F}_1 \right) - \left(\tilde{W}_2, \overset{\circ}{F}_2 \right) \right] \right\} \\ & + \left\{ \kappa \left[\left(\tilde{W}_1, \tilde{U}_1 \right) - \left(\tilde{W}_2, \tilde{U}_2 \right) \right] + \left(\tilde{U}_1, \overset{\circ}{F}_1 \right) - \left(\tilde{U}_2, \overset{\circ}{F}_2 \right) \right\} z_1 \\ & + \left\{ \left(\tilde{W}_1, \overset{\circ}{F}_1 \right) - \left(\tilde{W}_2, \overset{\circ}{F}_2 \right) \right\} z_2 = 0 \end{aligned}$$

aus (D) :

$$\begin{aligned} & \left\{ \kappa \text{ Spur } \left(\tilde{W}_{i,k} \right) \right\} \\ & + \left\{ \kappa \left[\left(\tilde{W}_1, \tilde{U}_2 \right) - \left(\tilde{W}_2, \tilde{U}_1 \right) \right] \right\} z_1 + \left\{ 2\kappa \det \left(\tilde{W}_{i,k} \right) \right\} z_2 \\ & + \left\{ \det \left(\tilde{U}_{i,k} \right) \right\} z_1^2 + \left\{ \det \left(\tilde{W}_{i,k} \right) \right\} z_2^2 + \left\{ \left(\tilde{W}_1, \tilde{U}_2 \right) - \left(\tilde{W}_2, \tilde{U}_1 \right) \right\} z_1 z_2 \\ & = 1 - \overset{\circ}{\rho}. \end{aligned}$$

* Der Ansatz für $\tilde{\tilde{F}}$ wurde durch die Pekuliarfelder $\tilde{\tilde{U}}$ und $\tilde{\tilde{W}}$ ausgedrückt. Die Vektorfunktionen $\tilde{C}^\alpha$ und $\tilde{C}^\beta$ sind Linearkombinationen dieser Felder gemäß $\tilde{C}^\alpha = A\tilde{\tilde{W}} + B\tilde{\tilde{U}}$, $\tilde{C}^\beta = (\chi - A)\tilde{\tilde{W}} - B\tilde{\tilde{U}}$, $\tilde{C}^\alpha + \tilde{C}^\beta = \chi\tilde{\tilde{W}}$; $\chi = \frac{1}{6a(T_0)}$ (für drei Fälle sind die Konstanten A und B in Appendix A aufgeführt).

Der Ansatz lautet $\tilde{F}_i = \tilde{X}_i + \tilde{U}_i z_1(T) + \tilde{W}_i z_2(T)$ mit $z_1 := B(g^\alpha - g^\beta)$, $z_2 := Ag^\alpha + (\chi - A)g^\beta$. Wir müssen garantieren, daß $\tilde{g} \neq 0$ für beide Moden gilt, was das Verschwinden von Moden ausschließt (Gleichung A8b) und speziell den Grenzfall $a = 1$, der getrennt behandelt werden muß (vgl. Appendix B).

Die Zwangsbedingungen folgen durch die Forderung, daß die Koeffizientenfunktionen von g^α und g^β und deren Kombinationen verschwinden müssen. Eine äquivalente Forderung ist, daß die Koeffizientenfunktion von z_1, z_2 und deren Kombinationen verschwinden müssen **.

$$\tilde{W}_{2,1} - \tilde{W}_{1,2} = 0 \quad (C2a)$$

$$(\tilde{W}_1, \tilde{U}_1) - (\tilde{W}_2, \tilde{U}_2) = \tilde{U}_{2,1} - \tilde{U}_{1,2} \quad (C2b)$$

$$\text{Spur}(\tilde{W}_{i,k}) = (1/\kappa)(1 - \tilde{\rho}) \quad (C2c)$$

$$(\tilde{W}_1, \tilde{U}_2) - (\tilde{W}_2, \tilde{U}_1) = 0 \quad (C2d)$$

$$\det(\tilde{U}_{i,k}) = 0 \quad (C2e)$$

$$\det(\tilde{W}_{i,k}) = 0. \quad (C2f)$$

Unter Berücksichtigung der Relationen zu den originalen Pekuliarfeldern (Gleichungen (A1a)), gelten die oben hergeleiteten Bedingungen auch für die Pekuliarfelder $\vec{U}$ und $\vec{W}$. Die einschränkenden Gleichungen (C2) werden durch drei Funktionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ einer unabhängigen Variablen (sagen wir W_1) gelöst. Diese Funktionen sind wegen der für $\vec{U}$ geforderten Eigenschaft der Existenz eines Potentials und wegen (C2a) über eine weitere Funktion Γ_6 voneinander abhängig; (hier bezeichnet ein Strich die Ableitung nach dem Argument):

$$W_2 = \Gamma_1(W_1) \quad \Gamma'_1 \Gamma'_2 = \Gamma'_3 \quad (C3)$$

$$U_1 = \Gamma_2(W_1) \quad W_1 = \Gamma_6(X_1 + \Gamma'_1 X_2)$$

$$U_2 = \Gamma_3(W_1)$$

** Die lineare Unabhängigkeit von g^α und g^β garantiert, daß g^α, g^β und alle Kombinationen von Produkten dieser Funktionen ungleich sind. Gemäß der Definition von z_1 und z_2 folgt die lineare Unabhängigkeit von z_1 und z_2 und aller Kombination von Produkten dieser Funktionen für $\chi \neq 0$.

Anmerkung:

Um diese funktionale Abhängigkeit zu bestimmen, schließen wir zunächst aus (C2e,f): $U_2 = f(U_1)$, $W_2 = \Gamma_1(W_1)$. Wir setzen das in (C2d) ein und bekommen $U_1 = \Gamma_2(W_1)$; deshalb gilt auch: $U_2 = \Gamma_3(W_1)$. Wir folgern daraus für (C2b): $U_{2,1} - U_{1,2} = 0$, d.h. Wirbelströmungen sind ausgeschlossen: $\vec{U} = \nabla_X \circ s$. Dies schränkt die drei Funktionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ über $\Gamma'_1 \Gamma'_2 = \Gamma'_3$ ein. (C2a) und (C2c) sind intrinsisch: (C2a) schränkt die unabhängige Variable W_1 über Γ_6 ein und (B2c) definiert die anfängliche Verteilung der Dichtestörungen die über die Forderung (5f) noch einer physikalischen Einschränkung unterliegen.

Der dreidimensionale Fall:

Durch Einsetzen des Ansatzes (A6) in der Form (C1) in das System (A7) erhalten wir gemäß der am Beispiel des zweidimensionalen Falls erläuterten Prozedur entsprechend folgende Gleichungen:

aus (R): ($i, j, k = 1, 2, 3$ paarweise verschieden und zyklisch; hier keine Summation über sich wiederholende Indizees)

$$T^0 : \left(\tilde{W}_k, \overset{\circ}{F}_k, \overset{\circ}{F}_i \right) - \left(\tilde{W}_j, \overset{\circ}{F}_i, \overset{\circ}{F}_j \right) = 0 \quad (C4a)$$

$$\begin{aligned} z_1 : & \left(\tilde{W}_k, \tilde{U}_k, \overset{\circ}{F}_i \right) + \left(\tilde{W}_k, \overset{\circ}{F}_k, \tilde{U}_i \right) - \left(\tilde{W}_j, \overset{\circ}{F}_i, \tilde{U}_i \right) - \left(\tilde{W}_j, \tilde{U}_i, \overset{\circ}{F}_i \right) \\ & = \frac{1}{\kappa} \left[\left(\overset{\circ}{F}_k, \tilde{U}_k, \overset{\circ}{F}_i \right) - \left(\overset{\circ}{F}_j, \overset{\circ}{F}_i, \tilde{U}_j \right) \right] \end{aligned} \quad (C4b)$$

$$z_2 : \left(\tilde{W}_k, \overset{\circ}{F}_k, \tilde{W}_i \right) - \left(\tilde{W}_j, \tilde{W}_i, \overset{\circ}{F}_j \right) = 0 \quad (C4c)$$

$$z_1^2 : \left(\tilde{W}_k, \tilde{U}_k, \tilde{U}_i \right) - \left(\tilde{W}_j, \tilde{U}_i, \tilde{U}_j \right) = \frac{1}{\kappa} \left[\left(\overset{\circ}{F}_k, \tilde{U}_k, \tilde{U}_i \right) - \left(\overset{\circ}{F}_j, \tilde{U}_i, \tilde{U}_j \right) \right] \quad (C4d)$$

$$z_2^2 : 0 = \left(\overset{\circ}{F}_k, \tilde{W}_k, \tilde{W}_i \right) - \left(\overset{\circ}{F}_j, \tilde{W}_i, \tilde{W}_j \right) \quad (C4e)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 : & \left(\tilde{W}_k, \tilde{U}_k, \tilde{W}_i \right) - \left(\tilde{W}_j, \tilde{W}_i, \tilde{U}_j \right) = \frac{1}{\kappa} \left[\left(\overset{\circ}{F}_k, \tilde{U}_k, \tilde{W}_i \right) + \left(\overset{\circ}{F}_k, \tilde{W}_k, \tilde{U}_i \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\overset{\circ}{F}_j, \tilde{W}_i, \tilde{U}_j \right) - \left(\overset{\circ}{F}_j, \tilde{U}_i, \tilde{W}_j \right) \right] \end{aligned} \quad (C4f)$$

aus (D):

($\epsilon_{ijk} = \epsilon_{[ijk]$, $\epsilon_{123} = +1$; hier Summation über wiederholt auftretende Indizes)

$$T^0 : \frac{\kappa}{2} \epsilon_{abc} \left(\tilde{W}_a, \overset{\circ}{\tilde{F}}_b, \overset{\circ}{\tilde{F}}_c \right) = 1 - \overset{\circ}{\rho} \quad (C4g)$$

$$z_1 : \left[\epsilon_{abc} \left(\tilde{W}_a, \overset{\circ}{\tilde{F}}_b, \tilde{U}_c \right) + \left(\tilde{W}_a, \tilde{U}_b, \overset{\circ}{\tilde{F}}_c \right) \right] = 0 \quad (C4h)$$

$$z_2 : \epsilon_{abc} \left(\tilde{W}_a, \overset{\circ}{\tilde{F}}_b, \tilde{W}_c \right) = 0 \quad (C4i)$$

$$z_1^2 : \frac{\kappa}{2} \epsilon_{abc} \left(\tilde{W}_a, \tilde{U}_b, \tilde{U}_c \right) = -\frac{1}{2} \epsilon_{abc} \left(\overset{\circ}{\tilde{F}}_a, \tilde{U}_b, \tilde{U}_c \right) \quad (C4j)$$

$$z_2^2 : 3\kappa \left(\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \tilde{W}_3 \right) = -\frac{1}{2} \epsilon_{abc} \left(\overset{\circ}{\tilde{F}}_a, \tilde{W}_b, \tilde{W}_c \right) \quad (C4k)$$

$$z_1 z_2 : \kappa \epsilon_{abc} \left(\tilde{W}_a, \tilde{W}_b, \tilde{U}_c \right) = -\frac{1}{2} \epsilon_{abc} \left[\left(\overset{\circ}{\tilde{F}}_a, \tilde{W}_b, \tilde{U}_c \right) + \left(\overset{\circ}{\tilde{F}}_a, \tilde{U}_b, \tilde{W}_c \right) \right] \quad (C4l)$$

$$z_1^2 z_2 : \epsilon_{abc} \left(\tilde{W}_a, \tilde{U}_b, \tilde{U}_c \right) = 0 \quad (C4m)$$

$$z_1 z_2^2 : \epsilon_{abc} \left(\tilde{W}_a, \tilde{W}_b, \tilde{U}_c \right) = 0 \quad (C4n)$$

$$z_1^3 : 0 = \left(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3 \right) \quad (C4o)$$

$$z_2^3 : \left(\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \tilde{W}_3 \right) = 0 \quad (C4p)$$

Bei der Lösung dieser Gleichungen vergleichen wir zunächst formal die entsprechenden Gleichungen des Appendix B mit den Gleichungen (C4) und betrachten dann die (durch die spezielle Forderung an die Form der Lösungen als Superposition von Hintergrundlösung und Pekuliaranteil) sich ergebenden zusätzlichen Zwangsbedingungen. Wegen der Homogenität des abgespalteten Hintergrunds sind die räumlichen Einschränkungen an die Anfangsbedingungen für die Pekuliarfelder $\tilde{U}$ und $\tilde{W}$ vergleichbar mit den Einschränkungen an $\overset{\circ}{v}$ und $\overset{\circ}{g}$ in Appendix B. Der Vergleich von (C4) und (B1-9) ergibt, daß die Ausdrücke links des Gleichheitszeichens in (C4a-p) formal den Gleichungen (B1-9) entsprechen. Die zusätzlich auftretenden Gleichungen schränken die funktionalen Abhängigkeiten der freien Funktionen aus (B1-9) noch so ein, daß Wirbelströmungen hier angeschlossen sind. Das kann man insbesondere auf die Tatsache zurückführen, daß die Einbeziehung des Hintergrunds die zeitabhängige Koeffizientenfunktion von $\tilde{U}$ zu einer nichtlinearen Funktion macht ($\tilde{z}_1 \neq 0$); die entsprechenden Terme der Klasse der Appendix B fallen beim zweiten zeitlichen Differenzieren fort, so daß spezielle rotierende Flüsse konstruiert werden können.

Man beachte, daß selbst für $\Lambda = 0$ (also in dem Fall der Entsprechung der beiden Gleichungssysteme an die totale Deformation $\vec{f}$, vgl. Gl. (8) für $\Lambda = 0$ mit Gl. (17)) die zusätzliche Einschränkung für $a \neq 1$ stets auftritt. Außerdem sei betont, daß die obige Betrachtung auf einem formalen Vergleich beruht; die sich entsprechenden Einschränkungen beziehen sich einmal auf die totalen Felder $\vec{v}$ und $\vec{g}$ in Appendix B, zum andern nur auf die Pekuliaranteile $\vec{U}$ und $\vec{W}$.

Allgemeine lokale Lösung der Gleichungen (C4):

Durch den oben dargelegten Analogieschluß läßt sich nun einfach die allgemeine Lösung der Gleichungen (C4) angeben. (Wir folgen dabei der Prozedur, die in Appendix B beschrieben ist und setzen die gewonnenen Funktionale in die verbleibenden Gleichungen ein). Das Resultat ist, daß die Freiheit der Wahl von im allgemeinen Fall vier Funktionen U_1, U_2, U_3 und ϕ dreier Variablen auf die Freiheit der Wahl von sechs Funktionen $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$ und Γ_6 einer Variablen, z.B. W_1 , reduziert wird. Diese Funktionen sind zusätzlich, als Konsequenz der Wirbelfreiheit von $\vec{U}$, durch zwei Gleichungen verknüpft :

$$\begin{array}{lll}
 W_2 = \Gamma_1(W_1) & U_1 = \Gamma_2(W_1) & \Gamma'_2 \Gamma'_1 = \Gamma'_3 \\
 W_3 = \Gamma_4(W_1) & U_2 = \Gamma_3(W_1) & \Gamma'_2 \Gamma'_4 = \Gamma'_5 \\
 & U_3 = \Gamma_5(W_1) & W_1 = \Gamma_6 (X_1 + \Gamma'_1 X_2 + \Gamma'_4 X_3) .
 \end{array} \tag{C5}$$

Alternativ dazu können die Zwangsbedingungen (C5) explizit als Lösung des folgenden äquivalenten Satzes von Gleichungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\phi}_{,2,2}\overset{\circ}{\phi}_{,3,3} - \overset{\circ}{\phi}_{,2,3}^2 &= 0 & \overset{\circ}{s}_{,2,2}\overset{\circ}{s}_{,3,3} - \overset{\circ}{s}_{,2,3}^2 &= 0 \\
\overset{\circ}{\phi}_{,3,3}\overset{\circ}{\phi}_{,1,1} - \overset{\circ}{\phi}_{,3,1}^2 &= 0 & \overset{\circ}{s}_{,3,3}\overset{\circ}{s}_{,1,1} - \overset{\circ}{s}_{,3,1}^2 &= 0 \\
\overset{\circ}{\phi}_{,1,1}\overset{\circ}{\phi}_{,2,2} - \overset{\circ}{\phi}_{,1,2}^2 &= 0 & \overset{\circ}{s}_{,1,1}\overset{\circ}{s}_{,2,2} - \overset{\circ}{s}_{,1,2}^2 &= 0
\end{aligned} \tag{C6a,b}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{s}_{,1} &= \Gamma_2 \left(\overset{\circ}{\phi}_{,1} \right) & \Gamma'_2 \Gamma'_1 &= \Gamma'_3 \\
\overset{\circ}{s}_{,2} &= \Gamma_3 \left(\overset{\circ}{\phi}_{,1} \right) & \Gamma'_2 \Gamma'_4 &= \Gamma'_5 \\
\overset{\circ}{s}_{,3} &= \Gamma_5 \left(\overset{\circ}{\phi}_{,1} \right)
\end{aligned} \tag{C6c}$$

(Jeweils eine der Gleichungen (C6a) respektive (C6b) ist redundant).

Die Gleichungen (C6a,b) drücken die Eigenschaft aus, daß die 2-Flächen $\Omega(X_i = \text{const.}, X_j, X_k)$; $i,j,k = 1,2,3$, $i \neq k,j$), wobei $\Omega = \overset{\circ}{\phi}$ oder $\overset{\circ}{s}$ die Pekuliarpotentiale bezeichnet, verschwindende Gaussche Krümmung besitzen.

Die allgemeine lokale Lösung der Gleichungen (C6) wurde in Appendix B bereits für die totalen Potentiale $\overset{\circ}{\Phi}$ und $\overset{\circ}{S}$ angegeben: hier ist $\alpha := \overset{\circ}{\phi}_{,1}$:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\phi} &= \alpha X_1 + \Gamma_1(\alpha) X_2 + \Gamma_4(\alpha) X_3 + C(\alpha) \\
0 &= X_1 + \Gamma'_1(\alpha) X_2 + \Gamma'_4(\alpha) X_3 + C'(\alpha) \\
\overset{\circ}{s} &= \Gamma_2(\alpha) X_1 + \Gamma_3(\alpha) X_2 + \Gamma_5(\alpha) X_3 + \tilde{C}(\alpha) \\
0 &= \Gamma'_2(\alpha) X_1 + \Gamma'_3(\alpha) X_2 + \Gamma'_5(\alpha) X_3 + \tilde{C}'(\alpha)
\end{aligned} \tag{C7}$$

Die Gleichungen (C6c) sind in der Darstellung (B7) implizit erfüllt; die Gleichungen (C6d) folgen, falls die implizite Darstellung von α in den Lösungen für $\overset{\circ}{\phi}$ und $\overset{\circ}{s}$ dieses α eindeutig festlegen; dann folgt noch eine zusätzliche Relation zwischen C und $\tilde{C}$: $\Gamma'_2 C' = \tilde{C}'(-C' = \Gamma_6)$.

Bemerkungen zu den nichtlinearen Restgliedern:

Die nichtlinearen Terme $\vec{R}_1$ und $\vec{R}_2$, die in der speziellen Form der Grundgleichungen (II.2.) auftreten, verschwinden als Konsequenz aus den Zwangsbedingungen (C5). Das ist *notwendig*, wie aus der Konstruktion des Lösungsansatzes in II.3. ersichtlich ist; es ist jedoch keine *hinreichende* Bedingung in dem Sinn, daß der Satz (C6) vollständig durch die Forderungen $\vec{R}_1 = \vec{0}$ und $\vec{R}_2 = \vec{0}$ bestimmt werden könnte. Wir zeigen zunächst, daß die skalaren Felder $\nabla_q \cdot \vec{R}_1$ und $\nabla_q \cdot \vec{R}_2$ durch skalare Invarianten der Pekuliarfelder wie folgt ausdrückbar sind; (hier: $J = \det(F_{i,k})$) :

$$\begin{aligned}\nabla_q \cdot \vec{R}_1 &= \frac{1}{a} \nabla_q \cdot ((\vec{u} \cdot \nabla_q) \vec{w} - \vec{u} (\nabla_q \cdot \vec{w})) \\ &= -\frac{1}{a} \epsilon_{abc} \frac{\partial(u_a, w_b, F_c)}{\partial(q_a, q_b, q_c)} \\ &= -\frac{1}{a} \epsilon_{abc} (u_a, w_b, F_c) J^{-1}\end{aligned}\tag{C8a}$$

$$\begin{aligned}\nabla_q \cdot \vec{R}_2 &= \frac{1}{a^2} \nabla_q \cdot ((\vec{u} \cdot \nabla_q) \vec{u} - \vec{u} (\nabla_q \cdot \vec{u})) \\ &= -\frac{1}{a^2} \epsilon_{abc} \frac{\partial(u_a, u_b, F_c)}{\partial(q_a, q_b, q_c)} \\ &= -\frac{1}{a^2} \epsilon_{abc} (u_a, u_b, F_c) J^{-1}\end{aligned}\tag{C8b}$$

Setzt man den allgemeinen Ansatz (21) in (C8a,b) ein, so erhält man Ausdrücke wie in (C4), die wiederum wegen (C5) verschwinden. Jedoch ist der durch (C8) gegebene Satz der einschränkenden Gleichungen nicht vollständig. Die Bestimmung der Zwangsbedingungen durch das Einsetzen des Ansatzes in die nicht eingeschränkten Gleichungen ist daher unerläßlich.

Das Verschwinden der skalaren Felder in (C8) impliziert:

$$(\vec{u} \cdot \nabla_q) \vec{w} - \vec{u}(\nabla_q \cdot \vec{w}) + \nabla_q \times \vec{r} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_1 = \vec{0};$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla_q) \vec{u} - \vec{u}(\nabla_q \cdot \vec{u}) + \nabla_q \times \vec{r}' = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{R}_2 = \vec{0}.$$

Die Spezialisierung dieser Nichtlinearitäten läßt somit noch nichttriviale Anfangsbedingungen zu, eine Tatsache, die eine Anwendung der darauf aufbauenden Approximationen bis zum Auftreten von Singularitäten stützt (vgl. II.7). Gleichzeitig ist diese Einsicht aber auch Anlaß für die Konstruktion allgemeinerer Approximationen, deren Möglichkeit in Kapitel III diskutiert wird. Die Einbeziehung der "nichtlinearen Restglieder" ist ein wesentlicher Bestandteil dieser Diskussion.

REFERENZEN

- Arnol'd V.I. (1972): "*Normal Forms for Functions near Degenerate Critical Points, The Weyl Groups of A_k , D_k , E_k and Lagrangian Singularities*", *Funct. Analiz. i Ego Prilozh.*, pp3-25; *Funct. Anal.* 1973, pp.254-272.
- Arnol'd V.I. (1975): "*Critical Points of Smooth Functions and their Normal Forms*", *Usp. Mat. Nauk* 30.5., pp. 3-65; *Russian Math. Surveys* 30.5., pp.1-75 (1975).
- Arnol'd V.I. (1976): "*Wave-front Evolution and Equivariant Morse Lemma*", *Comm. Pure & Appl. Math.* Vol. 29, pp.557-582.
- Arnol'd V.I. (1982): "*Evolution of Singularities of Potential Flows*", *Trudy Sem. Petrovskogo* 8, pp.21-57 (in Russisch).
- Arnol'd V.I. (1983a): "*Singularities of Systems of Rays*", *Usp. Mat Nauk* 38.2., pp.77-147; *Russian Math. Surveys* 38.2., pp.87-176 (1983).
- Arnol'd V.I. (1983b): "*Singularities, Bifurcations and Catastrophes*", *Usp. Fiz. Nauk* 141, pp.569-590; *Sov. Phys. Usp.* 26, pp.1025-1037 (1983).
- Arnol'd V.I. (1984): "*Catastrophe Theory*", Springer.
- Arnol'd V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A.N. (1982a): Originalausgabe: Nauka Moskau; "*Singularities of Differentiable Maps*", Birkhäuser Boston, Vol. 1 (1985).
- Arnol'd V.I., Shandarin S.F., Zel'dovich Ya.B. (1982b): "*The Large-scale Structure of the Universe I. General Properties. One- and Two-dimensional Models*", *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 20. pp.111-130.
- Bahcall N.A. (1987): "*Superclustering of Galaxy Clusters*", 12. Texas Symp., Ann. N. Y. Acad. Sci. Vol. 470, p.108.
- Barnes J., Dekel A., Efstathiou G., Frenk C.S. (1985): "*Cluster-Cluster Clustering*", *Ap.J.* 295, pp.368-373.
- Barrow J.D., Silk J. (1981): "*The Growth of Anisotropic Structures in a Friedmann Universe*", *Ap.J.* 250, pp.432-449.
- Barrow J.D., Bhavsar S.P. (1987): "*Filaments: What the Astronomer's Eye tells the Astronomer's Brain*", *Q.Jl.R. Astr. Soc.* 28, pp.109-128.
- Batuski D.J., Melott A.L., Burns J.O. (1987): "*Comparisons of Spatial Distribution of Abell Clusters against Models with Gaussian Initial Conditions*", *Ap.J.* 322, pp.48-58.
- Bel L. (1969): "*Kinetic Theory of Cosmology*", *ApJ.* 155, pp.83-87.
- Binney J. (1977): "*Anisotropic Gravitational Collapse*", *Ap.J.* 215, pp.492-496.
- Bisnovatyi-Kogan G.S., Novikov I.D. (1980): "*Cosmology with a Nonzero Neutrino Rest-mass*", *Astron. Zh.* 57, pp.899-902; *Sov. Astron.* 24, pp.516-517 (1981).

- Bisnovatyi-Kogan G.S., Zel'dovich Ya.B. (1970): "*Growth of Perturbations in an Expanding Universe*", Ap.J. 144, pp.233-241.
- Bond, J.R., Szalay A.S. (1983): "*The Collisionless Damping of Density Fluctuations in an Expanding Universe*", Ap.J. 274, pp.443-449.
- Bond, J.R., Szalay A.S. (1984): "*Adiabatic Theories of Galaxy Formation and Pancakes*", 11th Texas Symp. on Relativ. Astrophys. pp.82-89.
- Bonnor W.B. (1956): "*The Formation of the Nebulae*", Z.f. Astrophysik 39, pp.143-159.
- Bonnor W.B. (1957): "*Jeans' Formula for Gravitational Instability*", M.N.R.A.S. 117, pp.104-117.
- Bonnor W.B. (1967): "*Jeans' Formula for Gravitational Instability*", in: "Relat. Theory & Astrophys.", Appl. Math. 8, pp.263-273.
- Brown M.E., Peebles P.J.E. (1987): "*The Local Extragalactic Velocity-field, the Local Mean Mass-density and Biased Galaxy Formation*", ApJ. 317, pp.588-592.
- Bruce J.W. (1986): "*A Classification of 1-parameter Families of Map Germs $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ with Applications to Condensation Problems*", J.London Math. Soc. (2)33, pp.375-384.
- Buchert T., Götz G. (1987): "*A Class of Solutions for Self-gravitating Dust in Newtonian Gravity*", J. Math. Phys. 28 pp.2714-2719.
- Buchert T. (1988a): "*A Class of Solutions in Newtonian Cosmology and the Pancake-Theory*", Vorabdruck MPA 372; (eingereicht zur Publikation in Astron. & Astrophys.).
- Cavaliere A., Santangelo P., Tarquini G., Vittorio N. (1986): "*The Dynamical Evolution of Clusters of Galaxies*", Ap.J. 305, pp.651-667.
- Centrella J., Melott A.L. (1983): "*Three-dimensional Simulation of Large-scale Structure in the Universe*", Nature 305, pp. 196-198.
- Ciardullo R. (1987): "*The Morphology of the Rich Supercluster*", Ap.J. 321, pp.607-621.
- Courant R., Hilbert D. (1968): "*Methoden der Mathematischen Physik*", Bd II, 2. Auflage, Springer.
- Cowsik R., McClelland J. (1973): "*Gravity of Neutrinos of Nonzero Mass in Astrophysics*", Ap.J. 180, pp.7-10.
- Cowsik R., Ghosh P. (1987): "*Dark Matter in the Universe: Massive Neutrinos Revisited*", Ap.J. 317, pp.26-51.
- Davis M., Efstathiou G., Frenk C.S., White S.D.M. (1985): "*The Evolution of Large-scale Structure in a Universe dominated by Cold Dark Matter*", Ap.J. 292, pp.371-394.
- Dekel A. (1983a): "*Superclusters as Non-dissipative Pancakes: Flattening*", Ap.J. 264, pp.373-391.

- Dekel A. (1983b): "*Scenarios of Biased Galaxy Formation*", in: "*Nearly Normal Galaxies*", ed.: S.M. Faber, Springer.
- Dekel A., (1985): "*A Search for Galaxy-Pancake Alignments*", Ap.J. 298, pp.461-473.
- Dekel A., Rees M.J. (1987): "*Physical Mechanisms for Biased Galaxy Formation*", Nature 326, pp.455-462.
- de Lapparent V., Geller M.J., Huchra J.P. (1986): "*A Slice of the Universe*", Ap.J. 302, L1-L5.
- de Vaucouleurs G. (1978): "*The Local Supercluster*", in: IAU Symp. No. 79, eds.: Longair M.S., Einasto J., pp.205-213.
- Doroshkevich A.G. (1970): "*Spatial Structure of Perturbations and the Origin of Galactic Rotation in Fluctuation Theory*", Astrofizika 6, p.581; Astrophysics 6, pp.320-330 (1973).
- Doroshkevich A.G. (1973): "*The Origin of Rotation of Galaxies*", Astrophys.Lett. 14, pp.11-13.
- Doroshkevich A.G., Ryabenkii V.S., Shandarin S.F. (1973): "*Nonlinear Theory of the Development of Potential Perturbations*", Astrofizika 9, p.257; Astrophysics 9, pp.144-153 (1975).
- Doroshkevich A.G., Shandarin S.F. (1973): "*Formation and Evolution of Inhomogeneities in the Nonlinear Theory of Gravitational Instability*", Astrofizika 9, pp.549-565; Astrophysics 9, pp.332-341, (1975).
- Doroshkevich A.G., Shandarin S.F. (1974): "*Galaxy Formation in Nonlinear Gravitational-Instability Theory*", Astron. Zh. 51, pp.41-49; Sov. Astron. 18, pp.24-29.
- Doroshkevich A.G., Shandarin S.F. (1978): "*A Mean Density and a Correlation Function of Rich Clusters: Theory and Observations*", M.N.R.A.S. 182, pp.27-33.
- Doroshkevich A.G., Shandarin S.F., Saar E. (1978): "*Spatial Structure of Protoclusters and the Formation of Galaxies*", M.N.R.A.S. 184, pp.643-660.
- Doroshkevich A.G., Shandarin S.F. (1978): "*A Statistical Approach to the Theory of Galaxy Formation*", Astron. Zh. 55, pp.1144-1156; Sov. Astron. 22, pp.653-660 (1978).
- Doroshkevich A.G., Saar E.M., Shandarin S.F. (1978): "*The Internal Structure of Protoclusters and the Formation of Galaxies*", IAU Symp. No. 79, ed. M.S. Longair, pp.423-425.
- Doroshkevich A.G., Kotok E.V., Novikov I.D., Polyudov A.N., Shandarin S.F., Sigov Yu.S. (1980a): "*Two-dimensional Simulation of the Gravitational System Dynamics and Formation of the Large-scale Structure of the Universe*", M.N.R.A.S. 192, pp.321-337.

- Doroshkevich A.G., Zel'dovich Ya.B., Syunyaev R.A., Khlopov M.Yu. (1980b): "*Astrophysical Implications of the Neutrino Restmass II: The Density-perturbation Spectrum and Small-scale Fluctuations in the Microwave Background*", Pis'ma Astron. Zh. 6, pp.457-464. Sov. Astron. Lett. 6, pp.252-256.
- Doroshkevich A.G., Zel'dovich Ya.B., Syunyaev R.A., Khlopov M.Yu. (1980c): "*Astrophysical Implications of the Neutrino Restmass III: Nonlinear Growth of Perturbations and the Missing Mass*", Pis'ma Astron. Zh. 6, pp.465-469; Sov. Astron. Lett. 6, pp.257-259.
- Doroshkevich A.G., Khlopov M.Yu., Syunyaev R.A., Szalay A.S., Zel'dovich Ya.B. (1981): "*Cosmological Impact of the Neutrino Restmass*", 10th Texas Symp. on Relativ. Astroph., pp.32-42.
- Doroshkevich A.G., Shandarin S.F., Zel'dovich Ya.B. (1983): "*The Theory of Large-scale Structure of the Universe: Local Properties and Global Topology*", IAU Symp. No. 104, pp.387-391.
- Doroshkevich A.G., Khlopov M.Yu. (1984): "*Formation of Structure in a Universe with Unstable Neutrinos*", M.N.R.A.S. 211, pp.277-282.
- Doroshkevich A.G., Klypin A.A., Kotok E.V. (1986): "*Evolution of Inhomogeneities in Unstable-neutrino Cosmologies*", Astron. Zh. 63, pp.417-425; Sov. Astron. 30, pp.251-256 (1986).
- Ehlers J. (1971): "*General Relativity and Kinetic Theory*", Proc. Enrico Fermi XIVII, ed.: R.K. Sachs.
- Ehlers J., Rindler W. (1987): "*How far can observable relations determine a Robertson-Walker metric?*", Astron. Astrophys. 174, pp.1-4.
- Einasto J., Klypin A.A., Saar E. (1986): "*Structure of Superclusters and Supercluster Formation*", "V. Spatial Correlation and Voids", M.N.R.A.S. 219, pp.457-478.
- Einasto J., Klypin A.A., Saar E. (1986): "*Structure of Superclusters and Supercluster Formation, V. Spatial Correlation and Voids*", M.N.R.A.S. 219, pp.457-478.
- Einasto M., Einasto J. (1987): "*Structure and Formation of Superclusters, VI. Morphology, Density, Luminosity Relation of isolated and grouped Galaxies*", M.N.R.A.S. 226, pp.543-562.
- Filmore J.A., Goldreich P. (1984): "*Self-similar Gravitational Collapse in an Expanding Universe*", ApJ. 281, pp.1-8.
- Flin P., Godlowski W. (1986): "*The Orientation of Galaxies in the Local Supercluster*", M.N.R.A.S. 222, pp.525-541.
- Flin P. (1987): "*The Alignment of Galaxy Clusters*", M.N.R.A.S. 228, pp.941-948.

- Freese K. (1987): "*Fundamental Physics of Dark Matter*", in: "*Nearly Normal Galaxies*", ed.: S.M. Faber, Springer.
- Frenk C.S., White S.D.M., Davis M. (1983): "*Non-linear Evolution of Large-scale Structure in the Universe*", Ap.J. 271, pp.417-430.
- Fry J.N., Melott A.L. (1985): "*Statistical Comparison of Galaxy Formation Models: The Bispectrum*", Ap.J. 292, pp.395-403.
- Geller M.J., de Lapparent V., Kurtz M.J. (1987): "*The Galaxy Distribution and the Large-scale Structure of the Universe*", 12. Texas Symp., Ann. N. Y. Acad. Sci. Vol. 470, pp.123-135.
- Gersthein S.S., Zel'dovich Ya.B. (1966): "*Rest-mass of Muonic Neutrino and Cosmology*", Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 4, p.174; JETP Lett. 4, pp.120-122 (1966).
- Gilbert I.H. (1966): "*An Integral Equation for the Development of Irregularities in an Expanding Universe*", ApJ. 144, pp. 233-240.
- Götz G. (1988): "*Galaxienentstehung - Modelle für den Gravitationskollaps im nichtlinearen Bereich*", Dissertation LMU München.
- Gott III J.R., Melott A.L., Dickinson M. (1986): "*The Sponge-like Topology of Large-scale Structure in the Universe*", Ap.J. 306, pp.341-357.
- Grinstein B., Wise M.B. (1987): "*On the Validity of the Zel'dovich Approximation*", Ap.J. 320, pp.448-453.
- Groth E.J., Peebles P.J.E. (1975): "*Closed-form Solutions for the Evolution of Density-perturbations in some cosmological Models*", Astron. Astrophys. , pp.143-145.
- Guberman S.A., Doroshkevich A.G., Kotok E.V., Shandarin S.F. (1983): "*Geometrical Analysis of Catalogs of Galaxies*", Astrofizika 19, pp.97-110, Astrophysics 19, pp.58-66, 1983.
- Guckenheimer J. (1973): "*Catastrophes and Partial Differential Equations*", Ann. Inst. Fourier 23 (2), pp.31-59.
- Gurbatov S.N., Saichev A.I., Shandarin S.F. (1985): "*A Model for describing the Development of the Large-scale Structure of the Universe*", Dokl. Acad. Nauk 285, p.323; Sov. Phys. Dokl. 30, pp.921-923 (1985).
- Gurbatov S.N., Saichev A.I., Shandarin S.F. (1988): "*The Large-scale Structure of the Universe in the Frame of the Model Equation of Nonlinear Diffusion*", Vorabdruck MPA 371; (eingereicht zur Publikation in M.N.R.A.S.).
- Harrison E.R. (1970): "*Fluctuations at the Treshold of Classical Cosmology*", Phys.Rev.D Vol.1.10., pp. 2726-2730.
- Heckmann O., Schücking E. (1955): "*Bemerkungen zur Newtonschen Kosmologie I*", Zeitschrift für Astrophysik Bd.38, Seiten 95-109.

- Heckmann O., Schücking E. (1956): "Bemerkungen zur Newtonschen Kosmologie II", Zeitschrift für Astrophysik Bd.40, Seiten 81-92.
- Hörmander L. (1971): "Fourier Integral Operators I", Acta mathematica 127, pp.79 ff.
- Icke V. (1973): "Formation of Galaxies inside Clusters", Astron. Astrophys. 27, pp.1-21.
- Jõeveer M., Einasto J. (1978): "Has the Universe a Cell-Structure?", in: IAU Symp. No.79, eds.: Longair M.S., Einasto J., pp.241-251.
- Jones B.J.T. (1980): in: "The Origin and Early Evolution of the Galaxies"; "Galaxy Formation after $Z = 1000$ ", Phil. Trans. R. Soc. London A 296, pp.269-435.
- Jones B.J.T., Palmer P.L. (1985): "The Origin of Large-scale Cosmic Structure", in: "Galaxies, Axisymmetric Systems and Relativity", ed.: M.A.H. Maccallum, Cambridge University Press.
- Jones B.J.T., Martinez V.I., Saar E., Einasto J. (1987): "Multifractal Description of the Large-scale Structure of the Universe", NORDITA preprint 87/28A; erscheint in ApJ. Letters.
- Kaiser N. (1983): "Constraints on Neutrino-dominated Cosmologies from Large-scale Streaming Motion", Ap.J. 273- L17-L20.
- Kaiser N. (1987): "Clustering in Real Space and in Redshift Space", M.N.R.A.S. 227, pp.1-21.
- Kates R.E. (1986): "Self-focusing as a Mechanism for the Formation of Dense Structures in Newtonian Cosmology", Astron. & Astrophys. 168, pp.1-5.
- Kates R.E. (1987): "Nonlinear Evolution of Acoustic Dust Waves with Dark matter in Newtonian Cosmology: Biasing, KdV-solitons and the KP-equation", Vorabdruck MPA 283.
- Kayser R., Refsdal S., Stabell R. (1986): "Astrophysical Applications of Gravitational Micro-Lensing", Astron. Astrophys. 166, pp.36-52.
- Khlebnikov V.I. (1982): "Evolution of the Principal Mode of Density-perturbations in a Neutrino-Universe", Zh. Eksp. Teor. Fiz. 82, pp.1361-1365; Sov. Phys. JETP 55, pp.791-793.
- Klypin A.A., Shandarin S.F. (1983): "Three-dimensional Numerical Model of the Formation of Large-scale Structure in the Universe", M.N.R.A.S. 204, pp.891-907.
- Kolykhalov P.I., Shandarin S.F. (1984): "Sheared-pancake Instability and Protocluster Fragmentation", Pis'ma Astron. Zh. 10, pp.820-826; Sov. Astron. 10, pp.342-345.
- Lamb H. (1932): "Hydrodynamics", 6.Auflage, New York:Dover.
- Layzer D. (1963): "On the Fragmentation of Self-gravitating Gas Clouds", Ap.J. 137, pp.351-362.

- Lifshitz E.M. (1946): "*On the Gravitational Stability of the Expanding Universe*", ZhETF. 16, pp.587-608; J. Phys. USSR Acad. Sci. 10, p.116 (1946).
- Lifshitz E.M., Khalatnikov I.M. (1963): "*Problems of Relativistic Cosmology*", Usp. Fiz. Nauk 80, p.391; Sov. Phys. Usp. 6, pp.522 (1964).
- Lin C.C., Mestel L., Shu F.H. (1965): "*The Gravitational Collapse of a Uniform Spheroid*", Ap.J. 142, pp.1431-1446.
- Lilje P.B., Yahil A., Jones B.J.T. (1986): "*The Tidal Velocity Field in the Local Supercluster*", Ap.J. 307, pp.91-96.
- Lynden-Bell D. (1964): "*On Large-scale Instabilities during Gravitational Collapse and the Evolution of Shrinking MacLaurin Spheroids*", ApJ. 139, pp.1195-1216.
- Lynden-Bell D. (1967): "*Cooperative Phenomena in Stellar Dynamics*", in: "*Relativity Theory and Astrophysics 2. Galactic Structure*", Lect. Appl. Math 9, ed. J. Ehlers.
- Magalinskii V.B. (1972): "*Kinetic Theory of Small Perturbations of a Spatially Homogeneous Gravitating Medium*", Astr.Zh.49, pp.1017-1025; Sov.Astron.16, pp.830-836 (1973).
- Melott A.L. (1982): "*Simulation of Gravitational Superclustering of Massive Neutrinos*", Phys. Rev. Lett. 48, pp.894-896.
- Melott A.L. (1983a): "*Massive Neutrinos in Large-scale Gravitational Clustering*", Ap.J. 264, pp.59-86.
- Melott A.L. (1983b): "*Two-dimensional Simulation of the Gravitational Superclustering of Collisionless Particles*", M.N.R.A.S. 202, pp.595-604.
- Nolthenius R., White S.D.M. (1987): "*Groups of Galaxies in the CfA Survey and in Cold-Dark-Matter Universes*", M.N.R.A.S. 235, pp.505-530.
- Novikov E.A. (1969): "*Non-linear Evolution of Disturbances in a One-dimensional Universe*", ZhEFT. 57, p.938; Sov. Phys. JETP 30, pp.512-513 (1970).
- Novikov I.D. (1975): "*Pancake Structures formed from a Non-rotating Dust-medium*", Astron. Zh. 52, p.1038; Sov. Astron. 19, pp.627-628 (1975).
- Oort J.H. (1983): "*Superclusters*", Ann. Rev. Astron. Astrophys. 20, pp.373-428.
- Padmanabhan T., Vasanthi M.M. (1987): "*Dynamical Scenarios with Unstable Neutrinos*", ApJ.315, pp. 411-419.
- Palmer P.L. (1981a): "*Stability of Contracting Pancakes*", M.N.R.A.S. 197, pp.167-178.
- Palmer P.L. (1981b): "*Effects of Shape upon the Evolution of Perturbations in the Post-recombination Universe*", M.N.R.A.S. 197, pp.721-729.
- Peebles P.J.E. (1980): "*The Large Scale Structure of the Universe*", Princeton Univ. Press.
- Peebles P.J.E. (1982): "*Primeval Adiabatic Perturbations: Effect of Massive Neutrinos*", Ap.J. 258, pp.415-424.

- Peebles P.J.E. (1987): "A Fluid Model for the Evolution of Large-scale Structure", Ap.J. 317, pp.576-587.
- Peebles P.J.E., Yu I.T. (1970): "Primeval Adiabatic Perturbation in an Expanding Universe", ApJ.162, pp.815-836.
- Press H. (1976): "Foil" for Gravitational Clustering Investigations", Astron. & Astrophys. 48, pp.149-496.
- Primack J.R. (1984): "Dark Matter in the Universe" preprint Slac-Pub. 3387, (Proc. Enrico Fermi, North Holland).
- Rees M.J. (1987): "Biasing and Suppression of Galaxy Formation" in: "Nearly Normal Galaxies", ed.: S.M. Faber, Springer.
- Rhee G.F.B.N., Katgert P. (1987): "A Study of the Elongation of Abell Clusters", Astron. Astrophys. 183, pp.217-227.
- Roshanskii L.W., Shandarin S.F. (1984): "The Large-scale Structure of the Universe II. Three-dimensional Model", preprint (in Russisch) Inst. Appl. Math. USSR No. 79, 84.
- Rozgacheva I.K. (1984): "Heavy Neutrinos and the Evolution of Primordial Gravitational Perturbations", Astron. Zh. 61, pp.654-664. Sov. Astron. 28, pp.384-389 (1985).
- Ruffini R., Song D.J. (1987): "Cosmological Constraints of the "Inos" composing Galactic Halos", Astron. Astrophys. 179, pp.3-10.
- Sachs R.K., Wolfe A.M. (1967): "Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background", ApJ. 147, pp.73-90.
- Schipper L., King I.R. (1978): "The Elliptical Shape of the Coma Cluster", Ap.J. 220, pp.798-808.
- Schneider P., Weiß A. (1986): "The Two-point-mass Lens: Detailed Investigation of a Special Asymmetric Gravitational Lens", Astron. Astrophys. 164, pp.237-259.
- Schneider P., Weiß A. (1987): "A Gravitational Lens: Origin for AGN-variability?", Astron. Astrophys. 171, pp.49-65.
- Schramm D.N., Steigman G. (1981): "A Neutrino-dominated Universe" GRG 13.2., pp.101-107.
- Seliverstov V.V. (1974): "Kinetics of the Growth and Damping of Small Perturbations in Expanding Gravitating Matter", Astron.Zh.51, pp. 293-299; Sov.Astron.18, pp. 170-173 (1974).
- Serrin I. (1959): "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics", in: Encyclopedia of Physics VIII.1., Springer.
- Shandarin S.F. (1974): "Orientation of Angular Momenta of Galaxies", Pis'ma Astron. Zh. 18; Sov. Astron. 18, pp.392-393.

- Shandarin S.F. (1980): "*Evolution of Perturbations in Friedmann Models of the Universe*", *Astrofizika* 16, p.769; *Astrophysics* 16, pp.439-445 (1981).
- Shandarin S.F. (1983): "*Percolation Theory and the Cell-Lattice Structure of the Universe*", *Pis'ma Astron. Zh.* 9, p.232; *Sov. Astron. Lett.* 9, pp.104-106 (1983).
- Shandarin S.F., Zel'dovich Ya.B. (1983): "*Topology of the Large-scale Structure of the Universe*", *Comments Astrophys.* 10, pp.33-45.
- Shandarin S.F., Doroshkevich A.G., Zel'dovich Ya.B. (1983): "*The Large-scale Structure of the Universe*", *Usp. Fiz. Nauk* 139, pp.83-134; *Sov. Phys. Usp.* 26, pp.46-76 (1983).
- Shandarin S.F., Klypin A.A. (1984): "*Rich Galaxy Clusters may result from Large-scale Motions inside Superclusters*", *Astron. Zh.* 61, p.837; *Sov. Astron.* 28, pp.491-495 (1984).
- Shandarin S.F., Zel'dovich Ya.B. (1984): "*Topological Mapping Properties of Collisionless Potential and Vortex Motion*", *Phys. Rev. Lett.* 52, pp.1488- 1491.
- Shandarin S.F., Zel'dovich Ya.B. (1988): "*Turbulence, Intermittency, Structures in a Self-gravitating Medium. The Large-scale Structure of the Universe*", Vorabdruck MPA 350; (eingereicht zur Publ. in *Rev. Mod. Phys.*).
- Shapiro P.R., Struck-Marcell C., Melott A.L. (1983): "*Pancakes and the Formation of Galaxies in a Neutrino-dominated Universe*", *Ap.J.* 275, pp.413-429.
- Shapiro P.R., (1984): "*Pancakes and Galaxy Formation*", in "*Clusters and Groups of Galaxies*", eds.: F. Mardirossian et al., pp.446-478.
- Shapiro P.R., Struck-Marcell C. (1985): "*Pancakes and the Formation of Galaxies in a Universe dominated by Collisionless Particles*", *Ap.J. Suppl.* 57, pp.205-239.
- Shukurov A.M. (1981): "*Nonlinear Growth of Density-perturbations in an Expanding Collisionless Medium*", *Astrofizika* 17, p.469; *Astrophysics* 17, pp.263-272 (1982).
- Silk J. (1968): "*Cosmic Black Body Radiation and Galaxy Formation*", *ApJ.* 151, pp.459-471.
- Silk J. (1977): "*On the Fragmentation of Cosmic Gas Clouds. I. The Formation of Galaxies and the First Generation of Stars*", *Ap.J.* 211, pp.638-648.
- Silk J. (1983): "*Elementary Particles and the Large-scale Structure of the Universe*", *Proc.1. Eso-Cern Symp.*, Cern, Genf, S.225.
- Silk J., Vittorio N. (1987): "*Does lower Ω allow a Resolution of the Large-scale Structure Problems?*", *Ap.J.* 317, L31-L35.
- Stewart J.M. (1972): "*Perturbations in an Expanding Universe of Free Particles*", *ApJ.* 176, pp.323-332.

- Sunyaev R.A., Zel'dovich Ya.B. (1972): "*Formation of Clusters of Galaxies; Protocluster Fragmentation and Intergalactic Gas Heating*", *Astron. Astrophys.* 20, pp.189-200.
- Szalay A.S., Bond J.R. (1983): in: *IAU Symp. No. 104*, pp.307-312.
- Szalay A.S., Silk J. (1983): "*The Peculiar Velocity Field in Flattened Superclusters*", *Ap.J.* 264, L31-L35.
- Thompson L.A., Gregory S.A. (1978): "*Is the Coma Cluster a Zel'dovich Disk?*", *Ap.J.* 220, pp.809-815.
- Tift W.G., Gregory S.A. (1978): "*Observations of the Large-scale Distribution of Galaxies*" in: *IAU Symp. No. 79*, eds.: Longair M.S., Einasto J., pp.267-269.
- Tremaine S., Gunn J.E. (1979): "*Dynamical Role of Light Neutral Leptons in Cosmology*", *Phys. Rev. Lett.* 42 (6), pp.407-410.
- Trimble V. (1987): "*Existence and Nature of Dark Matter in the Universe*", *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 25, pp.425-472.
- Villumsen J.V., Davis M. (1986): "*Velocity Fields around Rich Clusters*", *Ap.J.* 308, pp.499-509.
- Vittorio N., Turner M.S. (1987): "*The Large-scale Peculiar-velocity Field in Flat Models of the Universe*", *Ap.J.* 316, pp.475-482.
- Weinberg D.H., Gott III. J.R., Melott A.L. (1987): "*The Topology of Large-scale Structure. I. Topology and the Random Phase Hypothesis*", *Ap.J.* 313, pp.505-516.
- Weinberg S. (1972): "*Gravitation and Cosmology*", Wiley.
- White S.D.M., Silk J. (1979): "*The Growth of Aspherical Structure in the Universe: Is the Local Supercluster an Unusual System?*", *Ap.J.* 231, pp.1-9.
- White S.D.M. (1987): "*Galaxy Formation and Large-scale Structure*", in: "*Nearly Normal Galaxies*", ed.: S.M. Faber, Springer.
- White S.D.M., Frenk C.S., Davis M., Efstathiou G. (1987): "*Clusters, Filaments and Voids in a Universe dominated by Cold Dark Matter*", *Ap.J.* 313, pp.505-516.
- Zabotin N.A., Nasel'skii P.D. (1985): "*Evolution of Adiabatic Irregularities during the Recombination Era and the Missing Mass in the Universe*", *Astron. Zh.* 62, pp.639-650; *Sov. Astron.* 29, pp.375-381 (1986).
- Zakharov A.V. (1982): "*The Influence of a nonzero Neutrino-restmas upon the Growth of Perturbations in an Isotropic Universe*", *Astron. Zh.* 59, pp.434-446; *Sov. Astron.* 26, pp.265-271 (1982).
- Zel'dovich Ya.B. (1965): "*Survey of Modern Cosmology*", *Adv. Astron. Astroph.* 3, pp.241 ff.
- Zel'dovich Ya.B. (1970a): "*Gravitational Instability: An Approximate Theory for Large Density Perturbations*", *Astron. Astrophys.* 5, pp.84-89.

- Zel'dovich Ya.B. (1970b): "*Fragmentation of a Homogeneous Medium under the Action of Gravitation*", *Astrofizika* 6, p.319; *Astrophysics* 6, pp.164-174 (1973).
- Zel'dovich Ya.B. (1972): "*A Hypothesis Unifying the Structure and the Entropy of the Universe*", *M.N.R.A.S.* 160,1P.
- Zel'dovich Ya.B. (1978): "*The Theory of the Large-scale Structure of the Universe*", *IAU Symp. No. 79*, pp.409-421.
- Zel'dovich Ya.B., Syunyaev R.A. (1980): "*Astrophysical Implications of the Neutrino Rest-mass I: The Universe*", *Pis'ma Astron. Yh.* 6, pp. 451-456, *Sov. Astron. Lett.* 6, pp.249-252.
- Zel'dovich Ya.B. (1982): "*The Origin of Large-scale Cell-structure in the Universe*", *Pis'ma Astron. Zh.* 8, p.195; *Sov. Astron. Lett.* 8, pp.102-103 (1982).
- Zel'dovich Ya.B., Myshkis A.G. (1973): "*Elements of Mathematical Physics, Medium of Non-interacting Particles*", Nauka, Moskau, (in Russisch).
- Zel'dovich Ya.B., Mamaev A.V., Shandarin S.F. (1983): "*Laboratory Observation of Caustics, Optical Simulation of the Motion of Particles and Cosmology*", *Usp. Fiz. Nauk.* 139, pp.153-163; *Sov. Phys. Uspekhi* 26, pp.77-83 (1983).
- Zel'dovich Ya.B., Einasto J., Shandarin S.F. (1982): "*Giant Voids in the Universe*", *Nature* 300, pp.407-413.
- Zel'dovich Ya.B., Shandarin S.F. (1982a): *Pis'ma Astron. Zh.* 8, p.259; *Sov. Astron. Lett.* 8, pp.139-140 (1982).
- Zel'dovich Ya.B., Einasto J., Shandarin S.F. (1982): "*Giant Voids in the Universe*", *Nature* Vol. 300, pp.407-413.
- Zel'dovich Ya.B., Novikov I.D. (1983): "*Relativistic Astrophysics* Vol. 2, Chicago Univ. Press, verbesserte Auflage; ursprünglich veröffentlicht: 1975, Nauka Moscow.
- Zentsova A.S., Chernin A.D. (1980): "*Evolution of Entropy Perturbations in the Post-Recombination Epoch. II. Nonlinear Stage*", *Astrofizika* 16, p.169; *Astrophysics* 16, pp.108-113 (1980).
- Zhou Y.-Y., Fang D.-P., Deng Z.-G., He X.-T. (1986): "*The Distribution of Quasars on the Large-scale and the Superlarge-scale*", *Ap.J.* 311, pp.578-588.

Viele haben zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen:

Im Besonderen möchte ich dem Betreuer der Arbeit, Herrn Prof. Gerhard Börner für seine einfühlsame Leitung und Zielsetzung danken, welche auch den notwendigen Raum für kreatives Arbeiten schufen. Dank seiner Sprachkenntnisse war es möglich, russische Originalzitate zu erarbeiten, die wichtige Zugänge, besonders zum Verständnis der Arnol'dschen Arbeiten, eröffnet haben. Für seine Bemühungen um eine Doktorandenstelle am Max-Planck-Institut und weitere finanzielle Förderung möchte ich ihm und bei dieser Gelegenheit auch Herrn Prof. Kippenhahn herzlich danken.

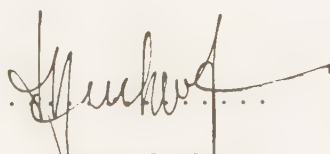
Denjenigen, die durch ihr Interesse, ihre Ideen und Diskussionen zu dieser Arbeit beigetragen haben, möchte ich nun den Dank aussprechen:

Zu einer fruchtbaren Zusammenarbeit führten intensive Gespräche mit Günter Götz; gemeinsame Sehweisen der Behandlung des Problems der Galaxienbildung mittels Methoden der Mathematischen Physik bestärkten die Arbeit. Für anregende Diskussionen und kollegiale Unterstützung möchte ich Dr. Ronald Kates besonders danken, sowie auch Stefan Bildhauer und Robert Klaffl, die meine Arbeit mit Interesse aufnahmen. Sehr verpflichtet bin ich Prof. Jürgen Ehlers, speziell für seine aufmerksame Durchsicht und hilfreiche Diskussion der Manuskripte zu dieser Arbeit. Ihm und Dr. Bernd Schmidt danke ich auch für kritische Diskussionsbeiträge im Rahmen von Seminaren, die ich während des ersten Jahres über die Theorie der Lagrange-Singularitäten abgehalten habe. Für Bestätigung und Klärung vieler Detailfragen, sowie für Projektvorschläge und einen intensiven gedanklichen Austausch in der Endphase meiner Arbeit möchte ich herzlichst Dr. Sergei Shandarin danken, der in den Monaten Dezember'87 bis Februar'88 am Max-Planck-Institut für Astrophysik unser Gast war.

Oft wurden technische Probleme durch die freundliche und zuvorkommende Unterstützung von Kollegen beschleunigt. Mein Dank gilt diesen Kollegen, insbesondere Michael Schmidt-Voigt, für seine freundliche Unterstützung beim Einsatz einer Plotroutine, Dr. Achim Weiß für Überlassung, Diskussion und problemspezifische Anpassung seines "ray-shooting"-Plotprogramms sowie Martin Lottermoser, Kay Pirk und Andreas Schott für ihre praktischen Tips.

Hilfreiche Engel beim Tippen des Manuskripts waren Hannelore Müller und Petra Berkemeyer, deren Bemühungen ich besonders loben möchte.

Mein innigster Dank gilt meiner zauberhaften Susann Motahari, die mich während dieser Zeit wohlwollend ertragen hat, ♡ .



Thomas Buchert

Lebenslauf: Thomas Buchert

Geburt: 18.8.1959 in Schwenningen am Neckar, heute Villingen-Schwenningen

Ausbildung: 1966-1969 Besuch der Grundschule in Schwenningen

1.8.1969 Aufnahme in das Gymnasium

1969-1978 Besuch des Gymnasiums am Deutenberg, Schwenningen

10.5.1978 Ausstellung des Abiturzeugnisses

15.9.1978 Immatrikulation an der LMU München

1978-1984 Studium der Physik an der LMU München;
Anfertigung der Diplomarbeit am Max-Planck-Institut
für Astrophysik in Garching bei München

26.10.1984 Verleihung des Grades "Diplom-Physiker" durch die
Münchener Universität

1984-1988 Doktorand am Max-Planck-Institut für Astrophysik

Beruf: 1.11.1984-

31.10.1987 Wissenschaftlicher Angestellter des Max-Planck-Instituts
für Astrophysik

Seit 1.11.87 Freier Mitarbeiter des Max-Planck-Instituts für Astrophysik

